Colisões 7

7.1 Impulso

Colisão pode ser definida como sendo a interação momentânea entre dois corpos. Durante o intervalo de tempo em que ocorre a colisão, as forças entre os corpos alteram-se sensivelmente. As leis de conservação em Física auxiliam consideravelmente o estudo das colisões.

Vamos começar considerando a lei trabalho-energia que vimos no Cap. 5. Uma força F agindo sobre um corpo de massa m ao longo de um pequeno deslocamento Δx realiza um trabalho:

$$F\Delta x = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{m}{2}(v_2 - v_1)(v_2 + v_1)$$

No caso do deslocamento ser infinitesimal, $v_1 \approx v_2 = v$ e $v_2 - v_1 = \Delta v$ e assim,

$$F\Delta x = mv\,\Delta v$$

dividindo por Δt e tomando o limite $\Delta t \to 0$

$$Fv = mv\frac{dv}{dt}$$

de onde obtemos a 2ª lei de Newton para massa constante,

$$F = m\frac{dv}{dt} = \frac{dp}{dt}$$

Se a força age sobre o corpo durante um intervalo de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, podemos integrar a expressão acima e obter:

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

onde já fizemos uma generalização para o caso tridimensional. A grandeza $\vec{I}$ é o impulso causado pela força $\vec{F}$ sobre o corpo durante o intervalo de tempo Δt. Dizemos então que o impulso causado pela força F é igual à variação de momentum do corpo.

Durante as colisões, as forças existentes em geral agem durante intervalos de tempo bem curtos e a representação gráfica para este tipo de força está mostrada na Fig. 7.1. Do que discutimos anteriormente, a variação da quantidade de movimento é exatamente a área sob a curva. Muitas vezes é interessante definir a força média que age sobre o corpo:

$$\vec{F}_m = \vec{I} / \Delta t$$

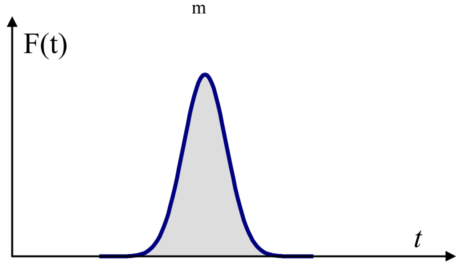

Fig. 7.1 - *Exemplo de variação da força com o tempo.*

Como exemplo, podemos calcular a força média exercida pelas bolas disparadas por uma metralhadora contra um alvo. Se a metralhadora dispara R balas por segundo, a força real exercida sobre o alvo é algo do tipo mostrado na Fig. 7.2.

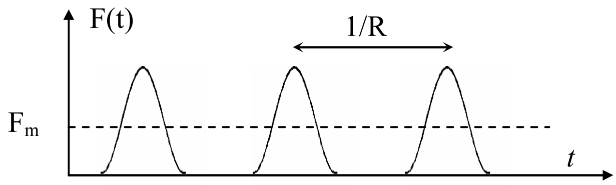

Fig. 7.2 - *Sequência de impactos produzida pelas balas de uma metralhadora.*

Desta forma, duraste o tempo 1/R, um momentum mv é transferido ao alvo, ou seja:

$$F_m . \frac{1}{R} = mv$$

$$F_m = Rmv$$

Para R ~ 4/s, m = 0,05 Kg e v = 100 m/s, temos F_m = 20 N.

7.2 Transporte de momentum para uma superfície. Pressão de um gás

Queremos encontrar a força exercida por um feixe de partículas de velocidade v e espaçamento ℓ sobre uma superfície. Após a colisão as partículas deixam a superfície com velocidade v', como indica a Fig. 7.3.

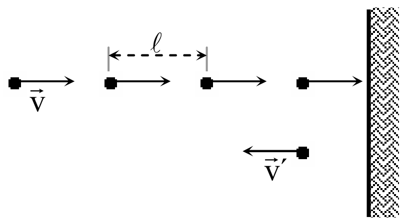

Fig. 7.3 - *Colisões de partículas com uma parede.*

Durante um tempo $\tau = \ell/v$ (tempo de chegada), o momentum transferido para a superfície é m(v + v') e conseqüentemente a força média é dada por:

$$F_m = \frac{m(v+v')}{\ell/v} = \frac{mv(v+v')}{\ell}$$

No caso em que v = v' temos um choque perfeitamente elástico e definindo uma "densidade linear de massa" como $\lambda = m/\ell$, a força média se torna:

$$F_m = \frac{2mv^2}{\ell} = 2\lambda v^2$$

Uma das grandes aplicações da transferência de momentum para superfícies é o cálculo da pressão que um gás contido numa caixa exerce sobre as paredes da mesma. Vamos imaginar as moléculas do gás como sendo esferas rígidas de massa m. Consideremos um recipiente de volume V com N moléculas dentro, como mostra a Fig. 7.4. Supondo que o movimento das moléculas é perfeitamente isotrópico, podemos dizer que a velocidade média é a mesma nas direções x, y e z, isto é, $v_x = v_y = v_z$. Assim, num dado intervalo de tempo Δt podemos imaginar que n moléculas caminham para a superfície com velocidade v_z.

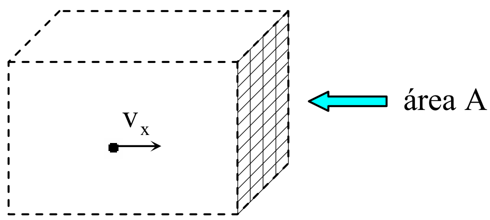

Fig. 7.4 - *Pressão que um gás contido numa caixa.*

O número de moléculas que atingirão a área A num intervalo de tempo Δt é:

$$n = \frac{1}{2}\rho v_x \Delta t\, A = \frac{1}{2}\frac{N}{V} v_x \Delta t\, A$$

onde o fator $\frac{1}{2}$ surge pelo fato de termos metade das moléculas caminhado para a esquerda. Supondo que a colisão com a superfície é completamente elástica, cada molécula transfere $2mv_x$ de momentum. Isto quer dizer que no tempo Δt, o impulso é dado por:

$$I = n.2mv_x = \frac{N}{V} m v_x^2 A\, \Delta t$$

e assim a força média agindo sobre a parede é:

$$F_m = \frac{I}{\Delta t} = \frac{N}{v} v_0^2 m A$$

A grandeza pressão é definida como força por unidade área e portanto:

$$P = \frac{F_m}{A} = \frac{N}{V} v_0^2 m$$

Existe um teorema, que veremos no futuro, chamado *teorema da equiparação de energia* que diz o seguinte: à energia contida em cada grau de liberdade do sistema está associada uma quantidade $\frac{1}{2}$ K_BT, onde K_B é chamada constante de Boltzmann e T é a temperatura em graus Kelvin. Por grau de liberdade queremos nos referir à. translação, rotação ou vibração de molécula. Como a molécula que estamos considerando é ideal, isto é, uma massa pontual sem estrutura interna, o único tipo de energia que ela pode ter é a translacional (cinética). Para o grau de liberdade x, a energia é:

$$K_x = \frac{1}{2} m v_x^2 = \frac{1}{2} K_B T$$

Portanto,

$$PV = NKT$$

que é conhecida como equação dos gases ideais.

7.3 Colisão e conservação de momentum

Vamos considerar um sistema de partículas na ausência de forças externas $\left(\sum \vec{F}_i^{ext} = 0\right)$. Neste caso, existem apenas forças internas, mas já vimos no capítulo anterior que $\left(\sum \vec{F}_i^{int} = 0\right)$, já que os pares ação-reação cancelam-se mutuamente. Portanto, como a força total é nula, o impulso também o é e, conseqüentemente, o momentum total do sistema é conservado.

$$\sum_{i=i}^{N} \vec{p}_{1i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_{2i}$$

Por outro lado, se olharmos para o centro de massa, veremos que sua velocidade é constante, pois a força externa é nula. Com relação à energia cinética do sistema, podemos separá-la em duas partes distintas:

$$K = \frac{1}{2} M V_{CM}^2 + K_r$$

onde M é a massa total do sistema. O 1º termo, que permanece constante para qualquer tipo de colisão é a energia cinética do centro de massa. O 2º termo K_r corresponde à energia dos componentes do sistema com relação ao centro de massa. De acordo com a variação de K_r a colisão pode ser classificada como: colisão perfeitamente elástica - K_r não se altera; e colisão perfeitamente inelástica (plástica) - K_r é completamente dissipada. A maioria das colisões está entre estes dois extremos.

a) Colisão perfeitamente elástica

Neste tipo de colisão, tanto o momentum como a energia cinética são conservados. Vamos considerar um sistema de dois corpos antes e depois da colisão como mostra a Fig. 7.5

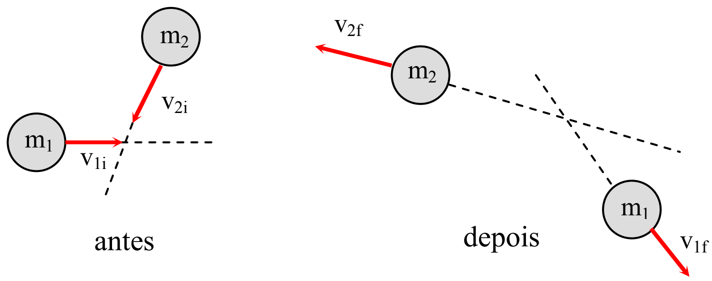

Fig. 7.5 - *Colisão perfeitamente elástica.*

Pelas leis de conservação de momentum e energia as equações para o problema são:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f}$$

que podem ser resolvidas fornecendo os valores de $\vec{v}_{1f}$ e $\vec{v}_{2f}$. Como exemplo, vamos considerar o caso da colisão de dois corpos em uma dimensão, tendo um deles velocidade inicial nula, conforme indicado na Fig. 7.6.

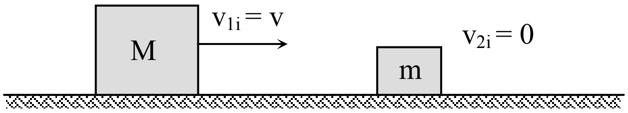

Fig. 7.6 - *Colisão unidimensional elástica com corpo inicialmente em repouso.*

Queremos encontrar v_{1f} e v_{2f} após a colisão. Usando as equações vistas anteriormente,

$$Mv = Mv_{1f} + mv_{2f}$$

Eliminando v_{2f} da equação de conservação de energia e substituindo na de conservação de *momentum*, obtemos uma equação de 2º grau cuja solução é:

$$v_{1f} = \frac{\frac{M}{m}v \pm v}{1+\frac{M}{m}} \qquad v_{2f} = \frac{M}{m}\frac{(v \mp v)}{1+\frac{M}{m}}$$

O sinal + em v_{1f} e - em v_{2f} fornece $v_{1f} = v$ e $v_{2f} = 0$ que é a condição inicial do problema, sempre contida na solução pois satisfaz conservação de momentum e energia. A solução que nos interessa é aquela que ocorre após a colisão, que é dada por:

$$v_{1f} = \frac{\left(\frac{M}{m}-1\right)}{1+\frac{M}{m}}v$$

$$v_{2f} = \frac{2\frac{M}{m}}{1+\frac{M}{m}}v$$

A primeira observação que podemos fazer é que:

$$v_{2f} - v_{1f} = -(v_{2i} - v_{1i})$$

isto é, “a velocidade relativa de um corpo em relação ao outro é apenas invertida na colisão”. Este é um resultado sempre válido em *colisões elásticas* unidimensionais.

A seguir vamos analisar alguns casos particulares de colisões elásticas em uma dimensão:

M = m) Neste caso, $v_{2f} = v$ e $v_{1f} = 0$ de forma que existe uma troca de velocidades.

M/m >>1) $v_{1f} \cong v$ e $v_{2f} \cong 2v$, existindo um grande impulso na massa menor.

M/m <<1) $v_{1f} \cong -v$ e $v_{2f} \cong 0$, ocorrendo somente uma reflexão do corpo mais leve.

b) Colisões perfeitamente inelásticas

Neste caso a energia cinética não é conservada embora o momentum o seja. Como exemplo, vamos considerar o tipo de colisão os corpos ficam unidos após o choque, como mostrado na Fig. 7.7.

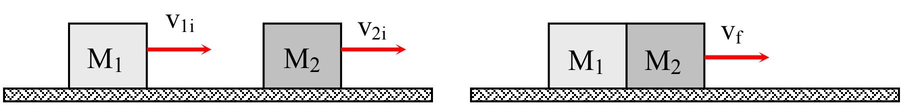

Fig. 7.7 - *Colisão perfeitamente inelástica*.

Usando a conservação de momentum,

$$M_1 v_1 + M_2 v_{2i} = (M_1 + M_2) v_f \Rightarrow v_f = \frac{M_1 v_{1i} + M_2 v_{2i}}{M_1 + M_2}$$

que é justamente a velocidade do centro de massa do sistema. Vamos a seguir calcular a quantidade de energia dissipada na colisão. Calculando as energias antes e depois da colisão temos:

$$K_i = \frac{1}{2}M_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2}M_2 v_{2i}^2$$

$$K_f = \frac{1}{2}\frac{\left(M_1 v_{1i} + M_2 v_{2i}\right)^2}{M_1 + M_2}$$

$$\Delta K = K_f - K_i = -\frac{1}{2}\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}\left(v_{1i} - v_{2i}\right)^2$$

que é sempre negativo, mostrando haver perda de energia. Para o caso em que $v_{2i} = 0$ temos

$$\frac{\Delta K}{K_i} = -\frac{M_2}{M_1 + M_2}$$

que é um resultado importante para estimarmos perda de energia em experimentos com pêndulo balístico.

Exercícios

1 - Dois carrinhos com massas m_1 e m_2 e velocidades v_1 e v_2 chocam-se elasticamente (a energia se conserva). Sabendo-se que o momentum do sistema se conserva durante a colisão, calcule as velocidades dos carros após o choque.

2 - Duas bolas A e B de massas diferentes colidem. A está inicialmente em repouso e B tem velocidade v. Depois do choque B tem velocidade v/2 e se move perpendicular à direção do movimento inicial. Determine a direção do movimento de A após a colisão. Qual é a variação da energia devido à colisão?

3 - Considere o pêndulo balístico mostrado na Fig. 7.8. A massa m tem velocidade inicial v e se une à massa M após a colisão. Determine o ângulo máximo atingido pelo pêndulo.

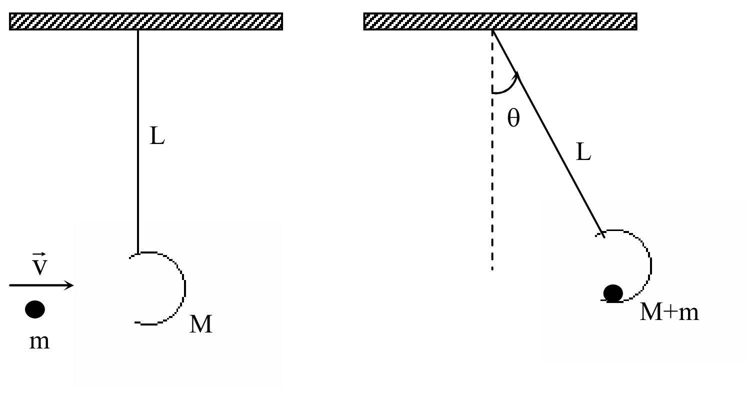

Fig. 7.8 - *Pêndulo balístico*.

4 - Uma bala de massa m é disparada com velocidade v contra um pêndulo balístico de massa M. A bala atravessa o pêndulo e emerge com velocidade (¼)v. (a) calcular a altura máxima de elevação do pêndulo, (b) calcular a energia dissipada quando a bala atravessa o pêndulo.

5 - Duas partículas, de massas m e M, deslizam sem atrito ao longo do eixo x com velocidades iniciais v_0 e V, e colidem. (a) qual é a velocidade do centro de massa? (b) qual é o momentum final de cada partícula no referencial do centro de massa? (c) qual é a velocidade de cada partícula no referencial do laboratório?

6 - Lança-se um corpo de massa m=0,2 kg com velocidade v_a=12 m/s sobre um carrinho de massa M=1,8 kg, que tem velocidade V=2 m/s. Sabendo-se que existe atrito entre o corpo e o carro, mas não entre o carro e a pista pergunta-se: a) qual a velocidade final do corpo e do carro? b) qual é a energia dissipada pelo atrito?

7 - Um bloco de massa 3m repousa sobre uma mesa sem atrito, preso à parede por uma mola de constante k. Uma bala de massa m é disparada horizontalmente contra o bloco, como mostra a Fig. 7.9 e engasta nele. Observa-se que a máxima deformação da mola é x. Encontre: (a) a

velocidade inicial da bala, (b) o impulso transferido pela bala ao bloco, (c) a fração de energia $-\Delta E/E_i$ perdida na colisão.

8 - Uma partícula com velocidade inicial v_0 colide com uma outra em repouso e é desviada de um ângulo ϕ. A sua velocidade, depois da colisão é v. A segunda partícula recua e a direção de seu movimento faz um ângulo θ com a direção inicial do movimento da primeira., como mostra a Fig. 7.10. Mostrar que: $\tan\theta = \dfrac{v\,\text{sen}\phi}{v_0 - v\cos\phi}$. Para obter este resultado, é necessário admitir que a colisão é elástica ou inelástica?

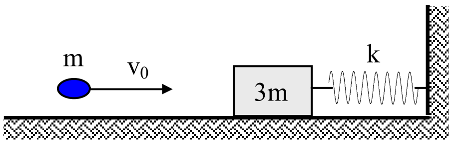

Fig. 7.9

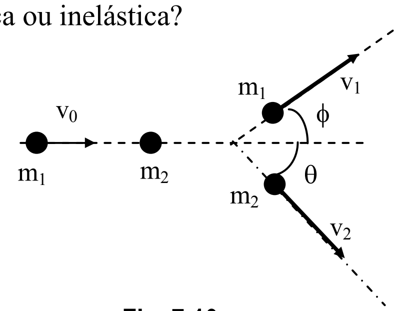

Fig. 7.10

9 - Um homem de massa m está sobre um carrinho de massa M, que rola num terreno plano sem atrito, com velocidade v_0. Num certo instante ele pula para o chão com velocidade $v_0/2$ em relação ao solo e na direção oposta ao movimento do carro. (a) qual é a velocidade do centro de massa do sistema antes e depois do pulo? (b) qual é a velocidade do carrinho depois do pulo? (c) transforme todas as velocidades para o referencial do centro de massa e indique num diagrama as velocidades iniciais e finais do homem e do carro neste referencial. (d) que energia o homem dissipou no pulo? (e) qual é a velocidade do centro de massa depois que o homem atinge o chão e fica parado?

10 - Uma mola de massa desprezível e constante k está comprimida de uma quantia x entre dois corpos de massa m_1 e m_2. A mola não está presa aos corpos, mas sua compressão é mantida inicialmente por um barbante sem massa, conforme mostra a Fig. 7.11. O sistema todo está se movendo

sobre uma mesa sem atrito, com velocidade V_{CM}. Subitamente o barbante se rompe. Calcule as velocidades finais v_1 e v_2 das massas.

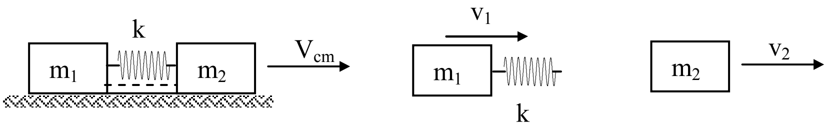

Fig. 7.11

11 - Dois corpos de massas m_1 e m_2 caminham para a direita com velocidades v_1 e v_2, tal que $v_1 > v_2$, conforme mostra a Fig. 7.12. O corpo 1 possui uma mola de constante de mola k, que é comprimida durante a colisão. Qual será a máxima deformação da mola?

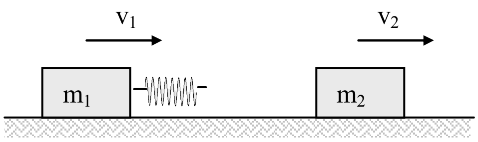

Fig. 7.12