

# Óptica geométrica paraxial 1

## 1.1 A aproximação paraxial

A óptica paraxial trata da propagação de luz por um sistema óptico centrado, que consiste de superfícies refratoras ou refletoras com simetria de rotação em torno de um eixo comum, chamado de eixo óptico. Uma lente simples é um exemplo de sistema centrado tendo como eixo óptico a linha que intercepta os centros de curvatura das duas superfícies. Uma sucessão de lentes simples também é um sistema centrado se seus eixos ópticos forem coincidentes. Em geral, sistemas que contêm superfícies inclinadas não possuem um eixo comum de simetria e não formam um sistema centrado.

Sistemas ópticos centrados têm a propriedade que um raio passando suficientemente próximo do eixo óptico sempre faz um ângulo de incidência pequeno com a normal a qualquer superfície. Tal raio é chamado de raio paraxial e sua refração é descrita como veremos adiante, por uma equação mais simples do que a dada pela lei de Snell, escrita como:

$$n \sin I = n' \sin I' \quad (1.1)$$

onde  $n$  e  $n'$  são os índices de refração para cada lado da superfície refratora, e  $I$  e  $I'$  são respectivamente os ângulos que os raios incidente e refratado fazem com a normal à superfície refratora. Neste capítulo, geralmente especificaremos os ângulos pelas letras  $I$  ou  $U$ , como é tradicionalmente feito em cálculos de traçado de raios. Neste caso,  $I$  é o ângulo que o raio faz com a normal à superfície refratora, enquanto que  $U$  é o ângulo que o raio faz com o eixo óptico.

Os raios incidente e refratado definem um plano que é chamado de plano de incidência. De acordo com a lei de refração, este plano

também contém a normal à superfície no ponto de incidência. Se o sistema for centrado e se o eixo óptico também estiver contido no plano de incidência, diz-se que o raio é um raio meridional; caso contrário temos um raio sagital (*skew ray*) que não cruza o eixo óptico, conforme mostra a Fig. 1.1. A lei da reflexão estabelece que o ângulo entre o raio refletido e a normal é igual em módulo e oposto em sinal ao ângulo de incidência.

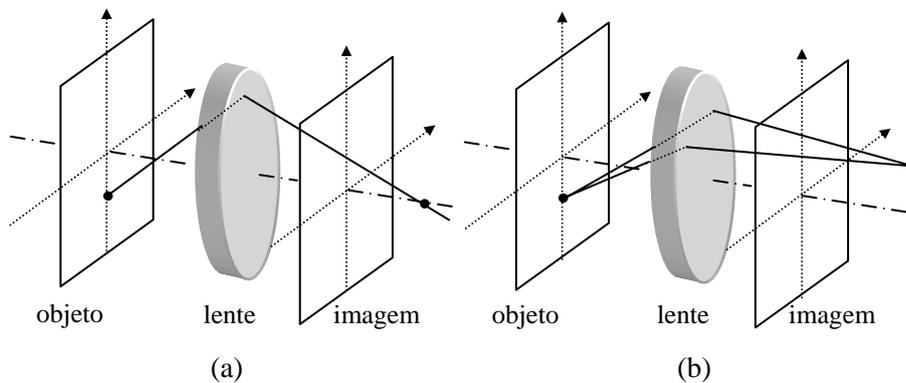


Fig. 1.1 – Exemplos de raio meridional (a) e raios sagitais (b).

Quando um raio caminha suficientemente próximo do eixo óptico em todos os pontos, o ângulo de incidência em qualquer superfície do sistema será necessariamente pequeno e assim, os senos dos ângulos podem ser satisfatoriamente aproximados pelos próprios ângulos, em radianos. Neste caso, a lei de Snell se torna:

$$n i = n' i' \quad (1.2)$$

onde o  $i$  minúsculo é usado para denotar o valor paraxial do ângulo real de incidência  $I$ . A simplificação da lei da refração que é obtida substituindo-se os senos pelos seus argumentos possibilita o desenvolvimento da teoria paraxial de formação de imagem.

## 1.2 Pontos cardiais

Muitas aproximações são usadas para prever as propriedades de formação de imagens de sistemas ópticos. Embora sistemas ópticos reais formem imagens cuja qualidade depende não só do próprio sistema, mas

também das condições de operação, teorias de formação de imagem são normalmente desenvolvidas no contexto da aproximação paraxial por duas razões. Primeiro, os raios paraxiais se propagam de acordo com leis relativamente simples que conduzem a técnicas diretas para descrever a formação da imagem. Segundo, para a otimização de um sistema real, a formação da imagem é determinada equilibrando ou eliminando as aberrações de forma que os raios reais convergem para o mesmo ponto da imagem que os raios paraxiais. Nesta seção consideraremos a teoria de formação da imagem paraxial desenvolvida por Gauss, que caracteriza sistemas ópticos de acordo com vários pontos especiais, conhecidos como *pontos cardeais* ou *pontos Gaussianos*.

É importante entender inicialmente as definições de espaço-objeto e espaço-imagem. Espaço-objeto refere-se ao espaço no qual um raio, ou sua extensão, se propaga antes de chegar ao sistema óptico. Espaço-imagem refere-se ao espaço no qual um raio, ou sua extensão, se propaga depois de atravessar o sistema. Por convenção, a luz caminha inicialmente da esquerda para a direita. Como mostra a Fig. 1.2(a), se a luz que deixa um objeto atravessa uma lente e converge para a imagem, a imagem é dita real. Se luz diverge depois de atravessar a lente, a imagem é virtual, como ilustrado na Fig. 1.2(b). Como o objeto e a imagem podem ser reais ou virtuais, o espaço-objeto e o espaço-imagem podem se estender a ambos os lados da lente.

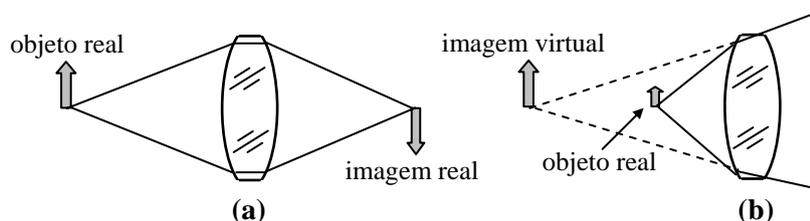


Fig. 1.2 – Formação de imagens real (a) e virtual (b).

É possível encontrar as propriedades de uma imagem através do traçado direto do raio paraxial. Por exemplo, se uma lente forma uma imagem de um objeto extenso, podemos selecionar alguns pontos do objeto e traçar vários raios partindo de cada um destes pontos para ver onde eles convergem depois de passar pela lente. Este tipo de abordagem que utiliza vários raios para se obter a formação da imagem é muito

trabalhoso. Porém, como todos os raios paraxiais que deixam um dado ponto do objeto convergem para o mesmo ponto da imagem, basta traçar apenas dois raios partindo daquele ponto para determinar a localização do ponto da imagem onde todos os raios daquele dado ponto do objeto convergem.

Considere um conjunto de lentes centradas em algum tipo de suporte que não nos permite observar os elementos reais que estão contidos no sistema, como mostra a Fig. 1.3. Um raio  $R_1$  que entra paralelo ao eixo óptico, da esquerda para a direita, emergirá do sistema e cruzará o eixo óptico em algum ponto  $F'$ . Este ponto é chamado de ponto focal (especificamente, de segundo ponto focal) da lente.

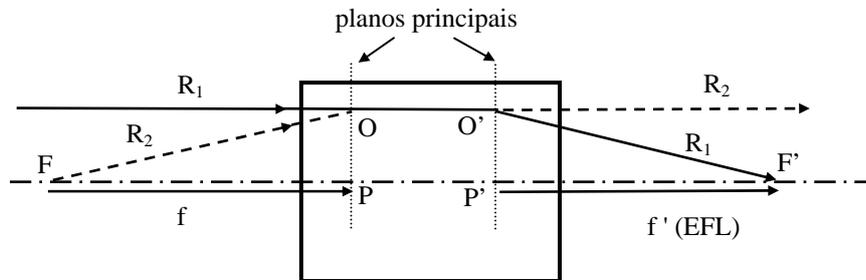


Fig. 1.3 – Traçado de raios num sistema óptico paraxial: pontos principais.

Considere agora um segundo raio  $R_2$  oriundo de um ponto da esquerda que atravessa a lente e emerge paralelo ao eixo óptico, na mesma altura que  $R_1$  entrou no sistema. Isto define o primeiro ponto focal  $F$ . Assim, temos dois raios que se interceptam no ponto  $O$  do espaço-objeto e no ponto  $O'$  do espaço-imagem. Isto implica que  $O'$  é a imagem de  $O$ .

Como a altura dos raios que entram no sistema é arbitrária, temos que o plano que contém  $O$ , normal ao eixo óptico, tem sua imagem formada no plano que contém  $O'$ , também normal ao eixo óptico. As interseções destes planos com o eixo óptico são chamadas de pontos principais  $P$  e  $P'$ . O primeiro ponto principal  $P$  está no espaço-objeto enquanto que o segundo ponto principal  $P'$  está no espaço-imagem, ou seja,  $P'$  é a imagem de  $P$ . Além disso, como  $O$  e  $O'$  são equidistantes do eixo, a magnificação (ampliação) lateral da imagem é unitária. Os planos  $OP$  e  $O'P'$  são chamados de planos principais de um sistema óptico e cada um se comporta como se fosse uma superfície de refração aparente (onde o raio muda a trajetória).

A distância entre o primeiro ponto focal e o primeiro ponto principal é chamada de primeiro comprimento focal,  $f$ , e a distância entre o segundo ponto principal e o segundo ponto focal é chamada de segundo comprimento focal, ou comprimento focal efetivo (*effective focal length* - EFL), ou simplesmente de comprimento focal  $f'$ . Se os índices de refração dos espaços objeto e imagem forem diferentes, o primeiro e o segundo comprimentos focais estão relacionados por:

$$\frac{n}{f} = \frac{n'}{f'} = \Phi \quad (1.5)$$

onde  $\Phi$  é denominado de poder da lente, como veremos na seção 1.14. Esta grandeza, que possui unidade de dioptria, é muito utilizada na área de oftalmologia (optometria) para caracterizar as lentes usadas nos óculos. Por exemplo, uma lente de grau 4 (4 dioptrias), possui uma distância focal de 0,25 m, no ar ( $n = 1$ ).

O conceito de planos principais é muito útil para o traçado dos raios paraxiais num sistema óptico, mas para sistemas reais, as superfícies de refração aparente não são planas. Uma condição necessária que uma lente perfeita deve satisfazer é que todos os raios de um ponto-objeto atravessem um único ponto no plano da imagem, independente da altura que os raios incidem sobre a lente. Este tipo de lente é livre de coma e é chamada de aplanática. Uma lente aplanática obedece à condição seno de Abbe:

$$\frac{u}{u'} = \frac{\text{sen } U}{\text{sen } U'} \quad (1.6)$$

que para raios vindo do infinito ( $\text{sen } U = u = 0$ ) pode ser escrita como:

$$f' = \frac{-y}{\text{sen } U'} \quad (1.7)$$

conforme se pode deduzir fazendo uso da Fig. 1.4. Note que na aproximação paraxial temos  $f' = -y/\text{tg}U'$ , como pode ser visto na Fig. 1.3.

Para uma lente aplanática, a superfície efetiva de refração aparente para raios provenientes do infinito é uma esfera centrada no segundo foco, como esquematizado na Fig. 1.4. A maioria das lentes reais se assemelha mais a sistemas aplanáticos do que a sistemas paraxiais.

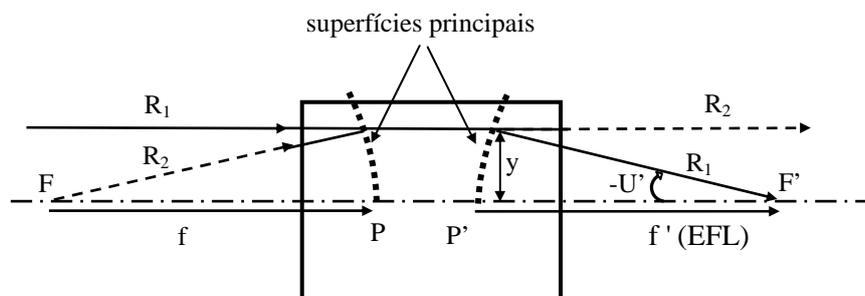


Fig. 1.4 – Traçado de raios num sistema óptico aplanático.

Há outro par de pontos conjugados que é de grande importância na determinação das propriedades de primeira ordem da formação de imagens de um sistema óptico. São os chamados pontos nodais  $N$  e  $N'$ , definidos como pontos conjugados com magnificação angular positiva unitária. Isto significa que os ângulos dos raios incidente e refratado são iguais em módulo e sinal. Se os índices de refração forem os mesmos em ambos os lados do sistema óptico, os pontos nodais são coincidentes com os pontos principais. Porém, se os índices de refração forem diferentes nos espaços do objeto e da imagem, os pontos nodais estarão deslocados dos pontos principais. Na Fig. 1.5, o raio  $R_2$  atravessa o ponto nodal  $N$  no espaço-objeto e emerge em  $N'$  no espaço-imagem. A distância entre os pontos nodais é igual à distância entre os pontos principais, e pode ainda ser mostrado que  $FP = N'F'$ . Um outro termo, o foco traseiro (*back focus*), é a distância da última superfície ao plano da imagem. Se o objeto está no infinito, o foco traseiro é igual à distância focal traseira (*back focal length*), mas para conjugados finitos é chamado de distância de trabalho.

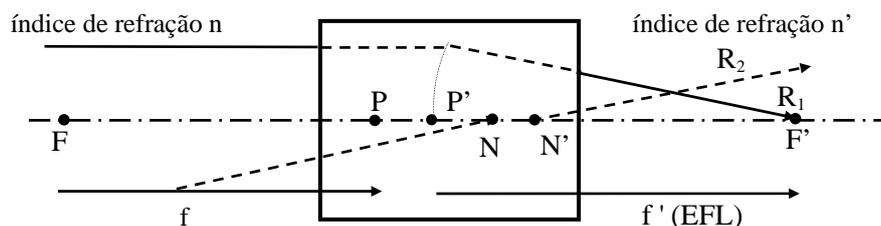


Fig. 1.5 – Definição dos pontos nodais.

Os pontos focais, os pontos principais e pontos nodais são chamados de pontos cardiais, ou pontos Gaussianos, de um sistema óptico. O conhecimento das suas posições permite a determinação das propriedades de formação da imagem. Note que os pontos cardiais são definidos em termos da ação do sistema sobre a luz que propaga por ele. Não existe nenhuma relação direta entre as posições dos elementos do sistema e a localização dos pontos cardiais. Assim, é importante encontrar alguma quantidade que meça a distância de um ponto cardinal até alguma superfície do sistema. A quantidade mais comumente usada para tal uma especificação é a distância focal traseira (*back focal length*), que é definida como a distância da última superfície óptica ao segundo foco. É importante notar que a distância focal efetiva de um sistema é bastante diferente da distância focal traseira do sistema; só para lentes muito finas elas são aproximadamente iguais.

Uma vez conhecidas as posições dos pontos cardiais de um sistema, é simples encontrar como ele transforma os raios do espaço-objeto para o espaço-imagem. De acordo com a Fig. 1.6, um raio desconhecido entra no primeiro plano principal a uma certa altura e emerge do segundo plano principal à mesma altura (porque os planos principais são planos conjugados de ampliação transversal unitária). Para determinar a trajetória do raio que emerge do sistema, podemos usar quaisquer das três construções de raios descritas a seguir.

Primeiro, podemos usar o raio  $R_1$ , que cruza o raio desconhecido no primeiro plano focal e entra no sistema paralelo ao eixo óptico. Este raio tem que passar pelo segundo foco depois que emergir do sistema, mas como cruza o raio desconhecido no primeiro plano focal, tem que emergir paralelo a ele.

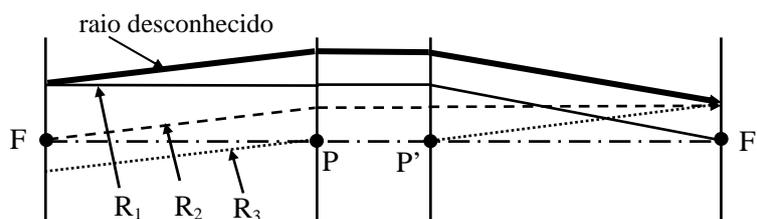


Fig. 1.6 – Traçado de um raio desconhecido usando os pontos cardiais.

Segundo, podemos escolher o raio  $R_2$ , que entra no sistema paralelo ao raio desconhecido, mas passando pelo primeiro foco. Tal raio tem que emergir do sistema paralelo ao eixo óptico. Novamente, como os dois raios entram no sistema paralelos um ao outro, eles tem que se cruzar no segundo plano focal, como mostrado.

Terceiro, podemos construir um raio  $R_3$  paralelo ao raio desconhecido, atravessando o primeiro ponto nodal do sistema. Tal raio tem que emergir do segundo ponto nodal do sistema com a mesma inclinação. Como o raio entrou no sistema paralelo ao raio desconhecido, os dois raios têm que se cruzar sobre o segundo plano focal.

### 1.3 Convenção de sinais

Para calcularmos matematicamente a propagação de raios por sistemas ópticos é necessária a adoção de uma convenção relativa à nomenclatura e sinais das variáveis. Consideraremos que um sistema óptico pode ser descrito com uma série de sistemas de coordenadas locais nos quais a direção  $z$  coincide com o eixo óptico e aponta para a direita, a direção  $y$  aponta para cima, e a direção  $x$  aponta para dentro do papel. Desta forma, temos um triedro positivo ( $\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$ ). Cada superfície do sistema é descrita num sistema de coordenadas locais para aquela superfície. Os cálculos paraxiais são bastante simplificados pelo fato de não existirem superfícies inclinadas ou descentralizadas, uma vez que estamos trabalhando com sistemas centrados. Assim, a origem de cada sistema de coordenada local está no eixo  $z$  do sistema de coordenadas locais prévio.

Quando é necessário distinguir uma quantidade em ambos os lados da superfície refratora, a quantidade no lado do objeto é escrita com um símbolo sem linha, enquanto que a quantidade no lado da imagem é escrita com um símbolo com linha. Por exemplo,  $n$  é o índice de refração no lado do objeto, e  $n'$  é o índice de refração no lado da imagem. Por convenção, a luz entra num sistema óptico pela esquerda, de forma que quantidades no lado esquerdo de uma superfície estão sem linha e aquelas à direita com linha. A notação com linha também é usada para denotar grandezas conjugadas. Assim, o ponto da imagem que corresponde ao ponto  $O$  do objeto é  $O'$ .

Como vimos, se um raio cruza o eixo óptico de um sistema, ele é coplanar ao eixo óptico e o plano definido por eles é chamado de plano meridional. Por convenção, o plano  $yz$  é escolhido como o plano meridional e assim, temos  $x = 0$  para raios meridionais. O raio numa determinada superfície é, portanto, descrito completamente por sua altura,  $y$ , e sua inclinação,  $u$ . Os raios que têm valores não nulos de  $x$  em alguma superfície são chamados de raios sagitais (*skew rays*). O sinal de  $u$  é positivo se o raio estiver subindo ( $y$  aumentando) e negativo se estiver descendo ( $y$  diminuindo).

Note que a definição mais geral de um sistema centrado não implica necessariamente em simetria rotacional em torno do eixo óptico. Por exemplo, superfícies cilíndricas podem estar centradas. Porém, na presente discussão, consideraremos apenas sistemas rotacionalmente simétricos (simetria azimutal) e suporemos que todos os pontos do objeto encontram-se sobre o eixo  $y$ . Devido à simetria rotacional, isto não traz nenhuma perda de generalidade.

Uma superfície esférica pode ser especificada por seu raio de curvatura,  $r$ , ou por sua curvatura  $c$ , que é definida como o recíproco do rádio de curvatura. O raio de curvatura será positivo se o centro de curvatura estiver à direita da superfície e negativo se estiver à esquerda. A distância entre duas superfícies é chamada de espessura  $t$  do espaço separando as duas superfícies.

Num sistema contendo várias superfícies, os parâmetros que especificam o sistema possuem subscritos para identificá-los com uma superfície particular. Assim, parâmetros da superfície, como curvaturas, possuem subscritos com o número de superfície à qual eles pertencem. Já os parâmetros ligados ao espaço entre superfícies, como espessuras e índices de refração, possuem tanto subscritos e linhas para indicar a superfície com que eles são associados. Isto resulta numa tautologia na qual a mesma quantidade física pode ser descrita por dois símbolos. Por exemplo, a espessura que separa a superfície atual da próxima pode ser designada ou como  $t'$  na superfície atual ou  $t$  na próxima superfície. Em programas de cálculo de desenho óptico, a espessura associada com uma determinada superfície é chamada  $TH$ , que corresponde a  $t'$ .

A Fig. 1.7 ilustra os parâmetros que descrevem um sistema óptico para o traçado de raios paraxiais. Note que todas as superfícies foram substituídas por planos tangentes aos seus vértices. Embora tenham sido dados os subscritos  $j$  e  $j-1$  a todos os parâmetros da figura para identificá-

los claramente com a superfície a que se referem, normalmente eliminamos o subscrito  $j$  em casos onde está claro que ele deveria estar presente. Por exemplo,

$$y = y_j \quad (1.8)$$

$$y_{-1} = y_{j-1}$$

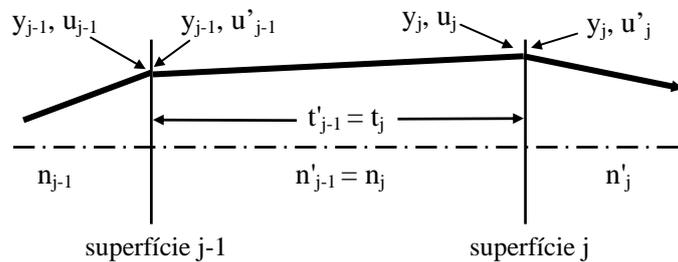


Fig. 1.7 – Parâmetros que descrevem uma sucessão de superfícies ópticas.

## 1.4 Traçado de raios paraxiais

O traçado de raios paraxiais é um assunto que tem sido muito estudado durante as últimas décadas. Várias técnicas eficientes foram desenvolvidas para executar os cálculos necessários. Nas seções seguintes consideraremos três métodos que são de uso comum: os métodos  $y$ - $u$ ,  $y$ - $u$ - $i$  e o método matricial. O método  $y$ - $u$  é o mais eficiente dos três e é extensivamente usado para cálculos manuais. O método  $y$ - $u$ - $i$  requer alguns passos a mais, mas gera os ângulos paraxiais de incidência durante o traçado e é provavelmente o método mais comumente usado em programas de computação.

Considere a propagação de um raio paraxial por um sistema óptico. Para tal raio, a inclinação é infinitesimal, de forma que o ângulo (em radianos) que o raio faz com o eixo e a tangente daquele ângulo (i.e., a inclinação) é a mesma. Assim, com base na Fig. 1.7 podemos escrever:

$$u = \frac{y - y_{-1}}{t} \quad (1.9)$$

onde o subscrito  $j$  foi omitido, como descrito anteriormente. Esta equação pode ser re-escrita para dar a equação de translação dos raios paraxiais de uma superfície até a próxima:

$$y = y_{-1} + tu \quad (1.10)$$

A equação de refração pode ser derivada com referência à Fig. 1.8, de onde vemos que:

$$\begin{aligned} I &= U + \theta \\ I' &= U' + \theta \end{aligned} \quad (1.11)$$

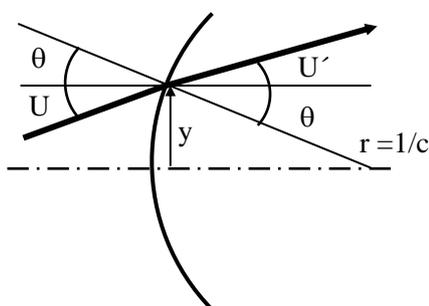


Fig. 1.8 – Refração por uma superfície esférica.

onde  $\theta$  é o ângulo que a normal à superfície faz com o eixo óptico, enquanto que  $U$  e  $U'$  são os ângulos que os raios incidente e refratado fazem com o eixo óptico. No limite paraxial, estes ângulos são aproximadamente iguais aos seus senos ou tangentes, e assim podemos escrever:

$$\begin{aligned} i &= \frac{y}{r} + u = yc + u \\ i' &= \frac{y}{r} + u' = yc + u' \end{aligned} \quad (1.12)$$

Ainda no limite paraxial, vimos que a lei de refração pode ser escrita como:

$$n i = n' i' \quad (1.13)$$

de forma que,

$$u' = \frac{nu - y\phi}{n'} \quad (1.14)$$

onde  $\phi = c(n'-n)$  é chamado de poder da superfície. Esta é a equação da refração paraxial, que dá a inclinação de um raio que emerge de uma superfície com poder  $\phi$  em termos da altura e inclinação do raio incidente. A aplicação sequencial das equações de translação e refração paraxiais permite o traçado de qualquer raio paraxial por um sistema óptico. Todos os métodos de traçado de raios discutidos nas próximas seções estão baseados nestas equações ou em algumas variações simples.

Antes de concluirmos esta seção, é importante salientarmos o fato que durante a translação o ângulo  $u$  é constante, enquanto que na refração, a altura  $y$  do raio não muda.

### 1.5 O método $y-nu$

O modo mais eficiente para traçar raios paraxiais à mão é o método denominado de  $y-nu$ . Este método utiliza uma planilha formatada para efetuar cálculos repetitivos de alturas e inclinações de raios paraxiais usando uma forma derivada das equações de traçado de raio vistas na seção anterior. Para traçar um raio pelo método  $y-nu$ , a equação de refração é escrita na forma:

$$n'u' = nu - y\phi \quad (1.15)$$

e a equação de translação é escrita como:

$$y = y_{-1} + \frac{t}{n}(nu) \quad (1.16)$$

Como  $nu$  é igual a  $n'u'$  da superfície anterior, as quantidades  $y$  e  $nu$  calculadas em dada etapa do traçado são usadas como entrada para a próxima fase. Por exemplo, determinado  $y$  e  $nu$  na primeira superfície do sistema, usa-se a equação de refração para calcular  $n'u'$  nesta superfície. Esta quantidade é usada, junto com  $y$ , para calcular a altura do raio na segunda superfície, usando a equação de translação. O processo se repete com o uso das equações de refração e translação na segunda superfície.

Como exemplo, calcularemos o traçado de um raio que entra numa lente paralelo ao eixo óptico ( $u=0$ ) a uma altura  $Y$ . Suporemos que os raios de curvatura das superfícies e a espessura da lente sejam dados

respectivamente por  $r_1$ ,  $r_2$  e  $t$ . Usando as equações (1.15) e (1.16) podemos montar a planilha abaixo, onde  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são respectivamente os poderes das superfícies 1 e 2. Note que na refração a altura  $y$  não muda enquanto que na translação  $nu$  é constante.

Tabela 1 – Planilha de cálculo para um raio paralelo ao eixo óptico entrando numa lente a uma altura  $Y$ .

	condições iniciais	refração na superfície 1	translação	refração na superfície 2
$t$			$t$	
$n$	1		$n$	
$\phi$		$\phi_1 = c_1(n-1)$		$\phi_2 = c_2(1-n)$
$y$	$Y$	$Y$	$Y(1-\phi_1 t/n)$	$Y(1-\phi_1 t/n)$
$nu$	0	$-Y\phi_1$	$-Y\phi_1$	$-Y(\phi_1+\phi_2-\phi_1\phi_2 t/n)$

Este exemplo foi feito de uma forma algébrica porque queremos encontrar a expressão da distância focal traseira da lente. No caso de cálculos numéricos, a determinação dos parâmetros do raio é bastante simples, bastando para isto manipularmos os elementos da planilha de maneira a seguir as equações (1.15) e (1.16). Um cálculo deste tipo será deixado como exercício no final do capítulo.

Como pode ser visto na última coluna da planilha de cálculo, o raio deixa a lente a uma altura  $Y(1-\phi_1 t/n)$ , fazendo um ângulo  $-Y(\phi_1+\phi_2-\phi_1\phi_2 t/n)$  com o eixo óptico. Podemos calcular a distância focal traseira da lente aplicando a equação da translação para uma distância  $f_{\text{BFL}}$  na qual o raio cruza o eixo óptico. O uso da eq. (1.16) leva a:

$$\frac{1}{f_{\text{BFL}}} = (n-1) \frac{\left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{(n-1)}{n} \frac{t}{r_1 r_2} \right)}{1 - \frac{(n-1)}{n} \frac{t}{r_1}} \quad (1.17)$$

No caso de uma lente delgada, a espessura pode ser desprezada ( $t \approx 0$ ) e o foco é dado pela tradicional equação do fabricante de lentes:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (1.18)$$

O método  $y$ - $nu$  pode ser usado para outros propósitos além do cálculo direto do traçado de raios para um determinado sistema. Um dos mais importantes é sintetizar um sistema tendo certas propriedades desejadas. Neste caso, fornecemos os dados do raio (altura e inclinação), ao invés dos parâmetros da lente, sendo estes determinados a partir dos dados do raio. Este modo de especificar os parâmetros de uma lente, pelo conhecimento do caminho dos raios paraxiais, é muito comum em programas de computação para desenho óptico.

Dois métodos para a especificação dos parâmetros de uma lente são mais comumente usados. O primeiro é chamado de *solução pelo ângulo* (angle solve), que determina a curvatura de uma superfície a partir do ângulo de um raio depois da refração. Por exemplo, suponha que traçamos um raio até a  $j$ -ésima superfície e nela conhecemos  $y$  e  $nu$ . Se queremos que o raio saia da superfície com uma inclinação  $u'$ , então, de acordo com a eq. (1.15) da refração paraxial, a curvatura da superfície tem que ser:

$$c = \frac{n'u' - nu}{y(n - n')} \quad (1.19)$$

O segundo tipo de especificação que é de uso comum é a *solução pela altura* (height solve), na qual a espessura no lado da imagem de uma superfície é especificada pela altura de um raio na próxima superfície. De acordo com a eq. (1.16) da translação paraxial, a espessura a ser determinada é:

$$t = \frac{y - y_{-1}}{u} \quad (1.20)$$

onde  $y$  é dado, e  $y_{-1}$  da superfície prévia e  $u$  são conhecidos.

## 1.6 O método $y$ - $u$ - $i$

Um método alternativo para traçar o raio paraxial, chamado de método  $y$ - $u$ - $i$ , usa as seguintes equações que podem ser derivadas diretamente das equações da refração paraxial e da translação:

$$\begin{aligned}
 y &= y_{-1} + tu \\
 i &= u + yc \\
 u' &= u + \left( \frac{n}{n'} - 1 \right) i
 \end{aligned}
 \tag{1.21}$$

Embora sejam usadas três equações (ao invés de duas) para o traçado de um raio através de uma superfície, a quantidade  $i$  é necessária para calcular as contribuições de aberração da superfície e assim o trabalho adicional produz dados úteis. Na realidade, se as aberrações do sistema precisam ser calculadas, o método  $y$ - $u$ - $i$  é de fato mais eficiente que o método  $y$ - $nu$ .

Como veremos posteriormente, é necessário traçar dois raios paraxiais (os raios axial e principal) para caracterizar completamente um sistema. Neste texto, a altura e a inclinação do raio axial (aquele que parte do centro do objeto e passa pela borda da lente) são indicados por  $y_a$ ,  $u_a$ , enquanto que a altura e a inclinação do raio principal (aquele que parte da borda do objeto e passa pelo centro da lente) são  $y_b$ ,  $u_b$ . A maioria dos programas de desenho óptico usa  $PY$ ,  $PU$  e  $PI$  para indicar a altura, inclinação (relativa ao eixo óptico) e ângulo de incidência (relativo à normal) do raio axial (raio  $a$ ), e  $PYC$ ,  $PUC$  e  $PIC$  para indicar dados correspondentes para o raio principal (raio  $b$ ). Neste caso, a letra  $C$  corresponde a *chief* (principal).

## 1.7 Formalismo matricial

É possível escrever as equações para o traçado do raio paraxial na forma matricial, que é uma abordagem adequada para descrever sistemas que incluem muitos elementos ópticos, já que o efeito do conjunto pode ser encontrado através de multiplicação de matrizes. É também de muita importância na descrição da propagação de feixes gaussianos e cálculos de cavidades ressonantes para lasers, como veremos posteriormente.

Como vimos nas seções precedentes, existem relações lineares entre as características geométricas dos raios (altura e inclinação) quando eles refratam numa superfície ou transladam de uma superfície até a próxima. Estas relações podem ser escritas na forma matricial como veremos a seguir.

De acordo com a Fig. 1.7, quando um raio translada da superfície  $j-1$  até a superfície  $j$ , a altura muda, mas a inclinação permanece constante.

Usando este fato, juntamente com a eq. (1.16) do método y-nu, podemos escrever:

$$y_j = 1 \cdot y_{j-1} + \left( \frac{t'_{j-1}}{n'_{j-1}} \right) \cdot (n'_{j-1} u'_{j-1}) \quad (1.22a)$$

$$n_j u_j = 0 \cdot y_{j-1} + 1 \cdot (n'_{j-1} u'_{j-1}) \quad (1.22b)$$

Estas equações podem ser expressas através de produto de matrizes como:

$$\begin{pmatrix} y_j \\ n_j u_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t'_{j-1}}{n'_{j-1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{j-1} \\ n'_{j-1} u'_{j-1} \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

ou esquematicamente como  $R_j = \mathbf{T}'_{j-1} R_{j-1}$ , onde:

$$\mathbf{T}_j = \mathbf{T}'_{j-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t'_{j-1}}{n'_{j-1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t_j}{n_j} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

é a matriz que translada o raio entre as superfícies  $j$  e  $j-1$ , separadas por uma espessura  $t'_{j-1} = t_j$ , num meio com índice de refração  $n'_{j-1} = n_j$ , conforme esboçado na Fig. 1.7.

Analogamente à translação, podemos encontrar uma matriz que descreve a refração de um raio por uma superfície de poder  $\phi_j$ . Neste caso, usamos as equações para a refração que sabemos ser:

$$y'_j = 1 \cdot y_j + 0 \cdot (n_j u_j) \quad (1.25a)$$

$$n'_j u'_j = -\phi_j \cdot y_j + 1 \cdot (n_j u_j) \quad (1.25b)$$

Estas equações podem ser colocadas na forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} y'_j \\ n'_j u'_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\phi_j & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_j \\ n_j u_j \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

ou esquematicamente como  $R'_j = \mathbf{R}_j R_j$ , onde a matriz de refração é dada por:

$$\mathbf{R}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\phi_j & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n-1}{r_j} & 1 \end{pmatrix} \quad (1.27)$$

A aplicação sucessiva das matrizes de refração e translação permite o traçado de raios através de um sistema óptico. Se conhecermos os parâmetros do raio na superfície 1, após a refração na superfície  $k$  temos  $R'_k = \mathbf{M}_{k1} R_1$ , onde a matriz de transferência é dada por:

$$\mathbf{M}_{k1} = \begin{pmatrix} A_{k1} & B_{k1} \\ C_{k1} & D_{k1} \end{pmatrix} = \mathbf{R}_k \mathbf{T}_k \dots \mathbf{R}_2 \mathbf{T}_2 \mathbf{R}_1 \quad (1.28)$$

Vemos que a ordem do produto das matrizes é tal que os índices mais baixos estão à direita, pois atuam primeiro no raio. As quantidades  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  são chamadas de constantes Gaussianas do sistema e a matriz de transferência é conhecida como matriz ABCD. A razão principal de se usar o formalismo matricial na óptica paraxial é a de fornecer uma formulação compacta para a descrição das propriedades de transformação de um sistema óptico.

Uma propriedade interessante das matrizes de refração e translação é que elas são unitárias, isto é,  $|\mathbf{R}| = |\mathbf{T}| = 1$ . Desta forma, como o produto de matrizes unitárias resulta numa matriz de transferência unitária, temos  $AD - BC = 1$ .

Como exemplo da aplicação do formalismo matricial, vamos refazer o caso de um raio que entra numa lente paralelo ao eixo óptico ( $u=0$ ) a uma altura  $Y$ . Novamente, os raios de curvatura das superfícies e a espessura da lente são dados respectivamente por  $r_1$ ,  $r_2$  e  $t$ . A matriz de transferência da lente é dada por:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\phi_2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\phi_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \phi_1 \frac{t}{n} & \frac{t}{n} \\ -(\phi_1 + \phi_2 - \phi_1 \phi_2 \frac{t}{n}) & 1 - \phi_2 \frac{t}{n} \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

A transformação do raio incidente ao passar pela lente é obtida a partir de:

$$\begin{pmatrix} y' \\ n'u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AY \\ CY \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

que resulta em  $y' = Y(1 - \phi_1 t/n)$  e  $n'u' = u' = -Y(\phi_1 + \phi_2 - \phi_1 \phi_2 t/n)$ , de acordo com o resultado encontrado com o método y-nu. Para encontrarmos a distância focal traseira aplicamos a matriz de translação sobre o raio que deixa a lente, obrigando que ele cruze o eixo óptico a uma distância  $f_{\text{BFL}}$  da superfície 2. Assim temos:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & f_{\text{BFL}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AY \\ CY \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AY + f_{\text{BFL}} CY \\ CY \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

Igualando a primeira linha das matrizes encontramos  $f_{\text{BFL}}$  dado pela eq. (1.17).

Um caso particular importante da matriz de transferência dada pela eq. (1.28) é o da lente delgada, onde  $t \approx 0$ . Neste caso,  $\mathbf{M}$  se torna:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -(\phi_1 + \phi_2) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \quad (1.32)$$

onde  $\frac{1}{f} = \phi_1 + \phi_2 = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$  é a equação do fabricante de lentes.

## 1.8 Lentes finas

Nesta seção vamos apresentar algumas propriedades das lentes, dando ênfase especial às lentes finas ou delgadas. Uma lente é classificada como fina quando sua espessura for muito menor que a distância focal. Existem vários tipos de lentes cuja denominação depende de sua forma geométrica, como mostra a Fig. 1.9. Vamos nos ater apenas às lentes de superfícies esféricas, embora outras simetrias (cilíndrica, parabólica, elíptica, etc.) sejam hoje em dia de uso comum. De acordo com o que veremos na seção 1.14, a formação de imagens por uma lente fina obedece a uma equação simples:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s'} \quad (1.33)$$

onde  $f$  é a distância focal,  $s$  e  $s'$  são respectivamente as distâncias lente-objeto e lente-imagem. É importante para o fabricante de lentes saber como os raios de curvatura das superfícies esféricas e o índice de refração do vidro determinam a distância focal da lente. Esta informação, como vimos, é dada pela eq. (1.18) no caso das lentes finas. Uma outra forma de apresentar a equação do fabricante de lentes é com o sinal positivo na frente de  $1/r_2$ , porém neste caso a definição do sinal  $r$  é outra:  $r$  é positivo se a superfície for convexa e negativo se for côncava.

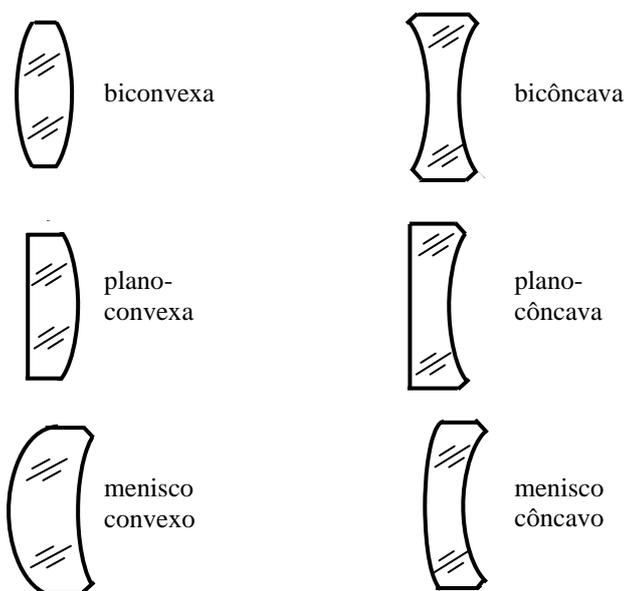


Fig. 1.9 - Seções transversais de algumas lentes finas de simetria esférica.

Uma propriedade importante da formação de imagens por uma lente ou espelho é o parâmetro denominado de aumento, ou magnificação, que caracteriza o tamanho da imagem em relação ao objeto. De acordo com a Fig. 1.10, podemos definir a *magnificação transversal* como:

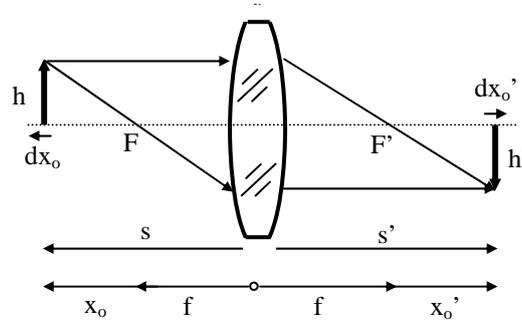


Fig. 1.10 - Formação de imagens por uma lente convergente.

$$m_T \equiv \frac{h'}{h} = -\frac{s'}{s} = -\frac{x_0'}{f} = -\frac{f}{x_0} \quad (1.34)$$

onde as três últimas igualdades são facilmente determinadas usando-se geometria elementar. Se  $m_T > 1$ , teremos um aumento da imagem em relação ao objeto; se  $m_T < 1$ , teremos diminuição da imagem. Os sinais negativos têm origem na definição dos sinais de  $s$ ,  $s'$ ,  $x_0$  e  $x_0'$ , e no caso em que  $m_T < 0$ , significa que a imagem está invertida.

Podemos definir também a *magnificação longitudinal* da imagem como:

$$m_L = \frac{dx_0'}{dx_0} \quad (1.35)$$

Para relacionarmos  $m_L$  com  $m_T$  tomamos a equação de formação de imagens (1.33), com  $s = f + x_0$  e  $s' = f + x_0'$ , de onde obtemos a forma Newtoniana da equação da lente:

$$x_0 x_0' = f^2 \quad (1.36)$$

Desta expressão encontramos:

$$m_L = -\frac{f^2}{x_0^2} = -m_T^2 \quad (1.37)$$

Evidentemente,  $m_L < 0$ , o que implica que se  $dx_0 > 0$  teremos  $dx_0' < 0$ , ou seja, se o objeto for um dedo apontado para a lente, a imagem será a de um dedo se afastando da lente.

### 1.9 Combinação de lentes finas

Quando várias lentes finas são colocadas bem próximas (em contato), a distância focal combinada do conjunto pode ser expressa como:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \dots \quad (1.38)$$

onde  $f_i$  é a distância focal da  $i$ -ésima lente. Esta equação é facilmente obtida multiplicando-se as matrizes das lentes delgadas, que deduzimos na seção 1.7.

Por outro lado, no caso em que duas lentes finas, de distâncias focais  $f_1$  e  $f_2$ , estão separadas de uma distância  $d$ , como mostrado na Fig. 1.11, a matriz que descreve o conjunto é:

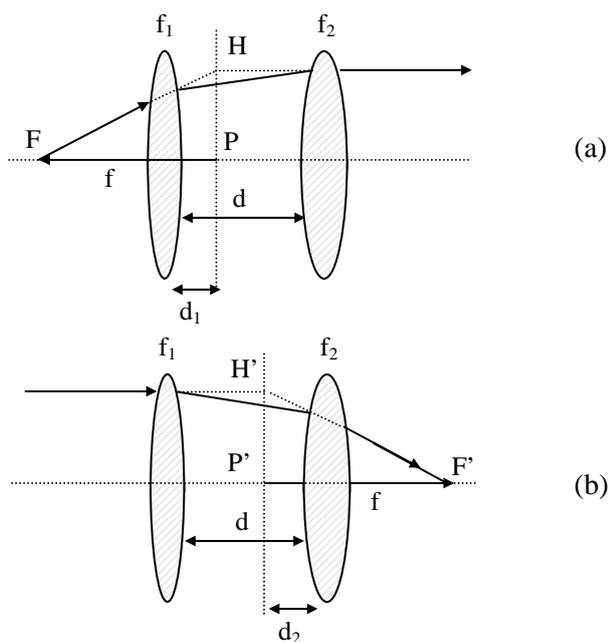


Fig. 1.11 - Associação de duas lentes separadas por uma distância  $d$ . O traçado dos raios está descrito no texto.

$$\mathbf{M}_c = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f_2} \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

onde o foco efetivo é dado por:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2} \quad (1.40)$$

Para entendermos um pouco melhor como funciona este sistema, vamos considerar um raio de luz que sai do foco efetivo,  $F$ , atravessa o conjunto e se torna paralelo ao eixo óptico como mostra a Fig. 1.11(a). Se traçarmos os prolongamentos dos raios que sai de  $F$  e aquele paralelo ao eixo, eles se interceptarão sobre o plano  $H$ , que como vimos, é chamado de primeiro plano principal. Qualquer outro raio saindo do foco com um ângulo diferente daquele mostrado, produzirá uma intersecção com o correspondente raio paralelo ao eixo óptico em algum ponto do plano principal. Para efeitos práticos, é como se houvesse uma lente de distância focal  $f$  localizada neste plano.

O raio que chega à lente  $f_1$  é caracterizado por uma altura  $y_1$  e por um ângulo  $u_1 = y_1 / (f - d_1)$ , onde  $d_1$  é a distância do plano principal à lente  $f_1$ . O raio que sai da lente  $f_2$  é caracterizado pelos parâmetros  $y_2 = y_1 + d_1 u_1$  e  $u'_2 = 0$ . Usando o formalismo matricial, onde a matriz  $\mathbf{M}_c$  dada em (1.39) é aplicada ao raio incidente, temos:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad (1.41)$$

de onde obtemos a distância do primeiro plano principal à lente  $f_1$ :

$$d_1 = \left( \frac{f}{f_2} \right) d \quad (1.42a)$$

Procedendo da mesma forma para o raio mostrado na Fig. 1.11(b), encontramos que a distância do segundo plano principal  $H'$  à lente  $f_2$  é dada por:

$$d_2 = \left( \frac{f}{f_1} \right) d \quad (1.421b)$$

A eq. (1.33) de formação de imagens continua válida, mas  $s$  é a distância entre o objeto e o plano primário e  $s'$  entre a imagem e o plano secundário.

### 1.10 Focalização de um feixe gaussiano

Ao incidirmos um feixe de luz colimada ( $s = \infty$ ) sobre uma lente de distância focal  $f$ , sabemos que o feixe será focalizado no plano focal ( $s' = f$ ). Uma pergunta que podemos fazer é sobre o diâmetro da mancha focal. De acordo com o que vimos com respeito à magnificação transversal, o tamanho desta mancha deveria ser nulo, pois  $s = \infty$ . Entretanto, um formalismo mais completo, que leva em conta a natureza ondulatória da luz e o perfil gaussiano do feixe, prediz que a mancha focal tem um raio da ordem de:

$$w \sim \frac{2\lambda f}{\pi D} \quad (1.43)$$

onde  $D$  é o diâmetro do feixe na lente,  $w$  é o raio da mancha focal, chamado de disco de Airy, e  $\lambda$  o comprimento de onda da luz. Este efeito está associado ao fenômeno de difração e aparece naturalmente da solução da equação de ondas eletromagnéticas em meios com simetria cilíndrica. Assim, quanto menor  $\lambda$ , mais focalizada será a luz. Este “detalhe” é muito importante para a fotolitografia, onde para se conseguir altíssima integração, deve-se utilizar luz ultra-violeta, geralmente conseguida através de um laser do tipo *excimer*.

### 1.11 Ação focalizadora de uma lente fina

Levando em conta a natureza ondulatória da luz, podemos explicar como se processa o efeito de focalização produzido por uma lente fina de índice de refração  $n$ . Consideremos uma onda colimada que se propaga

para a direita e incide sobre uma lente compreendida entre dois planos muito próximos como apresentado na Fig. 1.12. Esta onda “plana”, que se encontra discutida nos livros de óptica ondulatória, é caracterizada por uma fase espacial dada por  $\phi = kz$ , onde  $z$  é direção de propagação e  $k = 2\pi/\lambda$ . Ao atravessar a lente, haverá uma mudança de fase da onda, que depende da distância  $r$ , relativa ao centro da lente. Tal mudança é dada por  $\Delta\phi = k_0\Delta(r)$ , onde  $k_0$  é o vetor de propagação no vácuo e  $\Delta(r)$  é o caminho óptico, definido como o produto do índice de refração pela distância percorrida pela luz. Com base na Fig. 1.12, e denominando de  $t$  a espessura da lente, encontramos que o caminho óptico entre os planos 1 e 2 é dado por:

$$\Delta(r) = n_0(t_1+t_2) + n(t - t_1-t_2) = nt - (n-n_0)(t_1+t_2) \quad (1.44)$$

onde  $n_0$  é o índice de refração do ar, que doravante tomaremos como unitário ( $n_0=1$ ). As distâncias  $t_1$  e  $t_2$  entre a lente e os planos 1 e 2 podem ser calculadas através de argumentos geométricos, levando em conta que cada superfície da lente tem formato esférico. Assim, para a primeira superfície,

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 + (r_1 - t_1)^2 \quad (1.45)$$

onde  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  é a coordenada transversal a  $z$ . Desenvolvendo o quadrado e supondo que  $t_1$  é muito menor que  $r_1$  e  $r$ , obtemos:

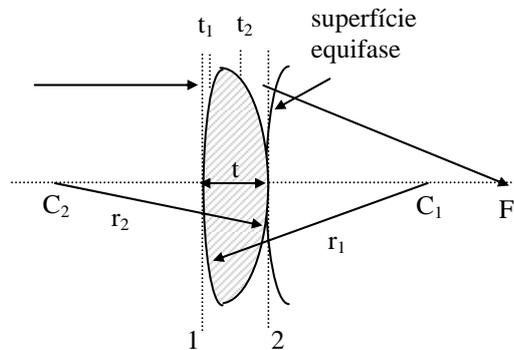


Fig. 1.12 – Geometria utilizada para o cálculo da mudança de fase de uma onda plana após a passagem por uma lente fina.

$$t_1 \cong \frac{r^2}{2r_1} \quad (1.46a)$$

Esta aproximação corresponde à aproximação paraxial que discutimos no início do capítulo. Procedendo de forma análoga para a superfície de raio  $r_2$ , que tem sinal negativo por definição, temos:

$$t_2 \cong -\frac{r^2}{2r_2} \quad (1.46b)$$

de forma que o caminho óptico é dado por:

$$\Delta(r) = nt - \frac{(n-1)}{2} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) r^2 = nt - \frac{r^2}{2f} \quad (1.47)$$

onde a equação do fabricante de lentes, eq. (1.18), foi utilizada nesta última passagem. Como consequência, a fase da onda sobre o plano 2 é:

$$\phi(r, z) = k_0 S(r, z) = k_0(z - t) + k_0 \left( nt - \frac{r^2}{2f} \right) \quad (1.48)$$

onde no primeiro termo da direita subtraímos a quantidade  $k_0 t$ , que é a fase que a onda ganharia se não houvesse lente.  $S(r, z)$  é chamada de função eikonal. Tomando seu gradiente em coordenadas cilíndricas podemos encontrar o versor  $\hat{u}$ , paralelo a  $\vec{k}$ , que define a direção de propagação da onda. Assim, temos:

$$\vec{\nabla} S(r, z) = n_0 \hat{u} = \hat{u} = \hat{k} - \frac{r}{f} \hat{r} \quad (1.49)$$

mostrando que a luz convergirá para o ponto focal  $F$ , pois  $\text{tg}\theta = r/f$ . Em outras palavras, a ação da lente é a de produzir uma curvatura na frente de onda. A fase diminui radialmente sobre o plano 2 e para termos uma superfície equifase teremos que caminhar para a direita conforme  $r$  aumenta. Assim, o termo  $k_0 z$  compensa o decréscimo radial da fase.

## 1.12 Lentes espessas

Nesta seção vamos abordar alguns outros detalhes da lente espessa, da qual já conhecemos a distância focal traseira (BFL), dada pela

eq. (1.17). Queremos agora encontrar sua distância focal efetiva,  $f$  (EFL), utilizando para isso o formalismo empregado na seção 1.9. O traçado de raios neste caso é bastante similar ao que vimos na associação de duas lentes finas e está apresentado na Fig. 1.13, juntamente com os planos principais, que chamaremos de  $H$  e  $H'$ .

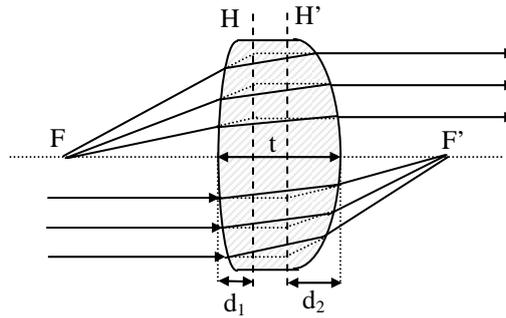


Fig. 1.13 - Formação de imagem por uma lente espessa e definição dos planos principais primário ( $H$ ) e secundário ( $H'$ ).

De acordo com a Fig. 1.13, vemos que um raio partindo de  $F$  chega à superfície esquerda a uma altura  $y_1$ , fazendo um ângulo  $u_1 = y_1/(f-d_1)$  com o eixo óptico, onde  $d_1$  é a distância do plano principal  $H$  à superfície esquerda da lente. O raio que sai da lente é caracterizado pelos parâmetros  $y_2 = f u_1$  e  $u'_2 = 0$ . Usando o formalismo matricial, onde a matriz da lente dada em (1.29) é aplicada ao raio incidente, chegamos a:

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \phi_1 \frac{t}{n} & \frac{t}{n} \\ -(\phi_1 + \phi_2 - \phi_1 \phi_2 \frac{t}{n}) & 1 - \phi_2 \frac{t}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad (1.50)$$

Igualando as linhas das matrizes obtemos:

$$y_2 = \left( \frac{f}{f-d_1} \right) y_1 = \left( 1 - \phi_1 \frac{t}{n} \right) y_1 + \frac{t}{n} \left( \frac{y_1}{f-d_1} \right) \quad (1.51a)$$

$$0 = -(\phi_1 + \phi_2 - \phi_1 \phi_2 \frac{t}{n}) y_1 + \left( 1 - \phi_2 \frac{t}{n} \right) \left( \frac{y_1}{f-d_1} \right) \quad (1.51b)$$

Com um pouco de álgebra conseguimos encontrar os valores de  $f$  e  $d_1$ , que são dados por:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{(n-1)t}{nr_1r_2} \right) \quad (1.52)$$

que é a equação do fabricante de lentes, e

$$d_1 = f t(1-n)/nr_2 \quad (1.53a)$$

O cálculo das distâncias  $d_2$  é feito de maneira análoga, porém tomando o raio que sai de  $F''$  e resulta em:

$$d_2 = f t(n-1)/nr_1 \quad (1.53b)$$

A eq. (1.33) continua válida desde que as distâncias do objeto ( $s$ ) e da imagem ( $s'$ ) sejam medidas em relação aos planos principais.

### 1.13 Teorema de Lagrange

Normalmente, além de sabermos a localização do plano de imagem que corresponde a um determinado plano de objeto, também queremos saber o tamanho da imagem, ou seja, a magnificação transversal do sistema. Se a altura de objeto é  $h$ , e altura de imagem é  $h'$ , a magnificação transversal,  $m_T$ , é dada pela eq. (1.34). Uma maneira direta de se determinar a magnificação transversal é inicialmente localizando o plano da imagem paraxial pelo traçado de um raio axial (aquele que parte do centro do objeto e passa pela borda da lente). Posteriormente traçamos o raio principal (aquele que parte da borda do objeto de altura  $h$  e passa pelo centro da lente), determinamos sua interseção com o plano da imagem paraxial, pela qual podemos achar  $h'$  e determinar a magnificação transversal.

Uma maneira mais simples de calcular a ampliação transversal de uma imagem é usando o teorema de Lagrange, que necessita apenas dos dados de um raio axial. Para ver como isto funciona, vamos inicialmente considerar a superfície refratora simples mostrada na Fig. 1.14. Tomemos um par de pontos conjugados axiais,  $B$  e  $B'$ , cujas distâncias à superfície são  $l$  e  $l'$ , respectivamente. Coloquemos em  $B$  um objeto de altura  $h$ , do qual se desenha o raio principal partindo da borda e indo para o vértice da

superfície. Usando a lei de Snell na aproximação paraxial ( $n\theta = n'\theta'$ ) e as relações  $\theta = h/l$  e  $\theta' = h'/l'$  obtemos:

$$nh/l = n'h'/l' \quad (1.54)$$

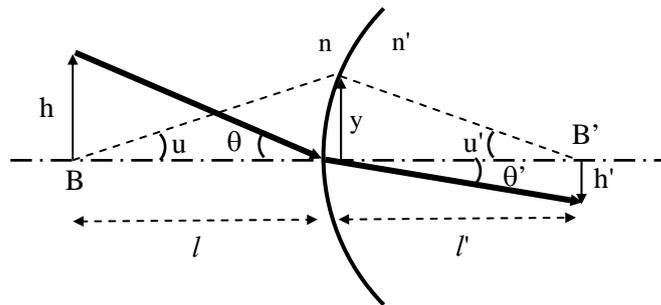


Fig. 1.14 – Figura usada para a demonstração do teorema de Lagrange.

A seguir, tomamos o raio axial partindo do centro do objeto, para o qual  $y = lu = l'u'$ , ou seja,  $l = u/y$  e  $l' = u'/y$ . Substituindo  $l$  e  $l'$  na eq. (1.54) e cancelando  $y$ , ficamos com:

$$nhu = n'h'u' \quad (1.55)$$

Esta igualdade leva o nome de *teorema de Lagrange* e o produto  $nhu$  é conhecido como *invariante de Lagrange*, ou invariante óptico. O teorema de Lagrange é um dos princípios de invariância mais poderosos da óptica geométrica. Como este teorema se aplica ao objeto original e à imagem final, é claro que a magnificação da imagem é dada por:

$$m_T = h'/h = nu/n'u' \quad (1.56)$$

A magnificação transversal é portanto igual à razão da inclinação óptica do raio axial no espaço do objeto pela inclinação óptica no espaço da imagem. Assim, a posição e a magnificação transversal de uma imagem é determinada apenas pelo raio axial. Além disso, como a magnificação só depende da inclinação do raio, não é necessário saber o local preciso da posição da imagem para saber seu tamanho.

### 1.14 Equações da imagem

O formalismo matricial pode ser aplicado para a análise da transformação de um objeto de altura  $h$  numa imagem de altura  $h'$ . Considere o caso onde as distâncias do objeto e da imagem são medidas com relação aos pontos principais, ao invés das superfícies inicial e final do sistema. A matriz de transferência unindo dois planos conjugados pode ser escrita como:

$$\begin{pmatrix} h' \\ n'u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_T & 0 \\ -\Phi & 1/m_T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ nu \end{pmatrix} \quad (1.57)$$

onde  $m_T$  é a magnificação transversal e  $\Phi$  é o poder do sistema. A dedução desta matriz será deixada como exercício no final do capítulo. Os pontos principais, como discutido anteriormente, são pontos conjugados de magnificação transversal unitária. Assim, um raio que entra no primeiro plano principal será transferido para o segundo plano principal por uma matriz onde  $m_T = +1$ . Isto resulta numa matriz de transferência entre os planos principais que é dada por:

$$M_{PP'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} \quad (1.58)$$

Chamando de  $s$  a distância do objeto ao primeiro plano principal e de  $s'$  a distância do segundo plano principal até a imagem, a matriz global é dada por:

$$\begin{pmatrix} h' \\ n'u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & s'/n' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & s/n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ nu \end{pmatrix} \quad (1.59)$$

Realizando a multiplicação indicada, obtemos:

$$\begin{pmatrix} h' \\ n'u' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \Phi (s'/n') & s/n + s'/n' - \left[ \frac{ss'}{nn'} \right] \Phi \\ -\Phi & 1 - \Phi (s/n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ nu \end{pmatrix} \quad (1.60)$$

A equação que determina a distância da imagem em termos da distância do objeto é achada zerando o elemento da matriz do canto superior direito, em concordância com a matriz dada na eq. (1.57):

$$s/n + s'/n' - \left[ \frac{ss'}{nn'} \right] \Phi = 0 \quad (1.61)$$

que ao ser dividido por  $(ss')/(nn')$  se torna:

$$n/s + n'/s' = \Phi = n/f = n'/f' \quad (1.62)$$

que corresponde à eq. (1.5). A magnificação transversal do sistema é determinada pelos elementos diagonais da matriz global:

$$m_T = 1 - \frac{s'\Phi}{n'} = -\frac{ns'}{n's} \quad (1.63)$$

$$\frac{1}{m_T} = 1 - \frac{s\Phi}{n} = -\frac{n's}{ns'} \quad (1.64)$$

onde a eq. (1.62) foi utilizada. As fórmulas que relacionam o objeto e a imagem assumem uma forma simples (freqüentemente chamada de forma Gaussiana) quando as distâncias do objeto e da imagem são medidas em relação aos planos principais. Se o objeto e imagem estão ambos em ar, a equação da imagem Gaussiana reduz-se à eq. (1.33).

## 1.15 Conceitos de radiometria

Uma máquina fotográfica do tipo câmara escura, que possui um pequeno orifício circular de entrada (*pinhole*) é um sistema óptico perfeito. Se o orifício for suficientemente pequeno, a resolução será limitada apenas pela difração. Infelizmente, a imagem será bastante fraca. De acordo com a teoria da difração, a resolução angular é dada por:

$$\Delta\theta \approx \frac{\lambda}{d_{\text{orifício}}} \quad (1.65)$$

onde  $d_{\text{orifício}}$  é o diâmetro do orifício. Curiosamente, esta relação indica que quanto maior for o orifício, melhor a resolução. Mas isto só é verdade do ponto de vista da óptica ondulatória porque na óptica geométrica, conforme se aumenta o diâmetro do orifício, a resolução piora. Porém, podemos colocar uma lente logo atrás do orifício de entrada para mover o plano da imagem mais próximo deste. Desta forma, podemos fazer o

buraco tão grande quanto quisermos para aumentar a irradiância da imagem e ao mesmo tempo aumentar a resolução.

Obviamente, a abertura de um sistema óptico é um de seus atributos mais importantes. O limite para o tamanho da abertura está ligado ao fato de que a qualidade de imagem se deteriorará se a abertura se tornar muito grande. A tarefa do desenhista óptico é equilibrar a complexidade do desenho com as exigências de uma abertura especificada.

A determinação da quantidade de luz que atravessa um sistema óptico, como por exemplo, a câmara escura, é um assunto tratado pela radiometria. Embora este seja um campo extenso, nós só nos preocuparemos aqui com as leis fundamentais e relações geométricas que são importantes para o desenho óptico. As condições fundamentais e conceitos usados na radiometria são geométricos por natureza. Quando é necessário aplicar estes conceitos geométricos a um sistema particular, o assunto é chamado fotometria se o sistema é visual, ou radiometria no caso geral. No que segue, vamos empregar um sistema de coordenadas esféricas, como mostrado na Fig. 1.15. Nele se vê um elemento diferencial de área dado por:

$$dA = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \quad (1.66)$$

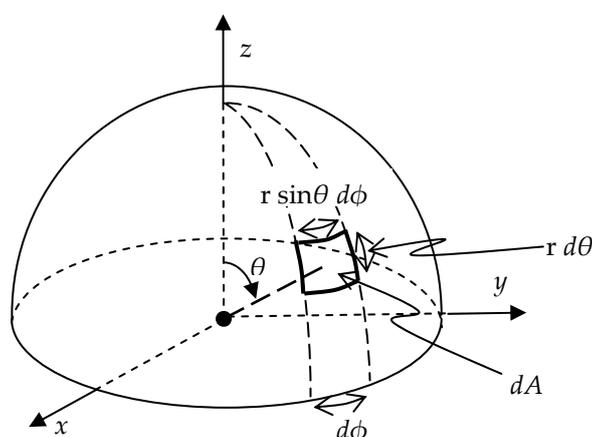


Fig. 1.15 – Definição de um elemento diferencial de área.

O ângulo sólido  $d\Omega$  subtendido por uma área  $A$ , vista da origem, é definido como a razão da área de uma superfície esférica, tangente à

extremidade da área  $A$ , pelo quadrado do raio da esfera. Assim, de acordo com a eq. (1.66), o elemento diferencial de ângulo sólido é:

$$d\Omega = \frac{dA}{r^2} = \sin\theta \, d\theta \, d\phi \quad (1.67)$$

Muitos problemas têm simetria azimutal e nestes casos, é conveniente considerar o elemento diferencial de ângulo sólido como um cone anular, como mostrado na Fig. 1.16. Se a superfície for circular e subtender um ângulo  $\theta_0$  visto de  $P$ , então:

$$\Omega = 2\pi \int_0^{\theta_0} \sin\theta \, d\theta = 2\pi(1 - \cos\theta_0) = 4\pi \sin^2 \frac{\theta_0}{2} \quad (1.68)$$

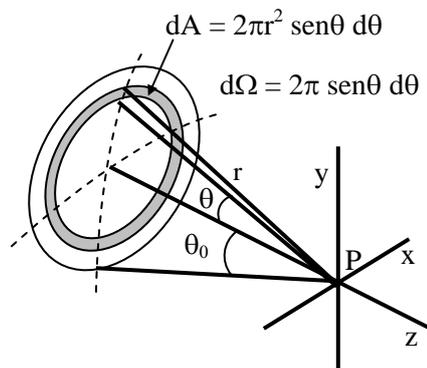


Fig. 1.16 – Elemento diferencial de ângulo sólido para problemas com simetria azimutal.

A radiometria usual está preocupada com a propagação e medida de radiação de fontes luminosas incoerentes. Para discutir luz de fontes incoerentes, apresentaremos a seguinte terminologia:

1. A taxa com que a energia muda com o tempo é chamada de fluxo, denotado por  $\Phi$ . Em unidades de MKS, a unidade de fluxo é o watt.
2. A energia por unidade de área que incide numa superfície é chamada de fluência, ou dose, e é denotada por  $F$ . Em unidades de MKS, a unidade de fluência é joule/m<sup>2</sup>.
3. O fluxo por unidade de área que incide numa superfície é chamado de irradiância e é denotado por  $E$ . Em unidades de MKS, a unidade de irradiância é watts/m<sup>2</sup>.

4. O fluxo total por unidade de ângulo sólido que vem de uma fonte pequena é chamado de intensidade, denotada por  $I$ . Supõe-se na definição de intensidade que o tamanho da fonte é pequeno comparado à distância ao ponto onde a intensidade é medida. Em unidades de MKS, a intensidade é medida em watts/sr. Uma fonte pontual uniforme é aquela que radia uniformemente em todas as direções. Para fonte deste tipo, a intensidade é:

$$I = \frac{d\Phi}{d\Omega} = \frac{\Phi}{4\pi} \quad (1.69)$$

5. Para discutirmos uma fonte extensa, precisamos de um termo para descrever a intensidade emitida por unidade de área da fonte. Esta quantidade é chamada de brilho da fonte (radiância), definido como o fluxo emitido por unidade de ângulo sólido, por unidade de área projetada na direção de observação, e denotada por  $L$ .

$$L = \frac{d^2\Phi}{dA \cos \theta d\Omega} \quad (1.70)$$

Uma fonte que tem uma radiância independente da direção é chamada de fonte *Lambertiana*. Os corpos negros e a maioria das superfícies difusas se comportam aproximadamente como fontes Lambertianas. Pode se mostrar que a radiância se conserva ao longo de qualquer tubo de raios que se propagam por um sistema óptico. Considere uma interface separando dois meios de índice de refração  $n$  e  $n'$ , como mostrado na Fig. 1.17.

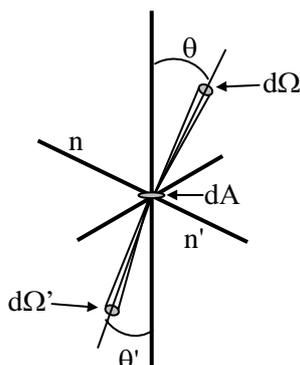


Fig. 1.17 – Superfície de separação entre dois meios.

Chamemos de  $dA$  uma área infinitesimal na interface. O fluxo em  $dA$  do tubo de raios contido dentro do ângulo sólido  $d\Omega$  é:

$$\frac{d^2\Phi}{dA} = L \cos \theta \, d\Omega \quad (1.71)$$

Este fluxo será transmitido para o segundo meio onde a radiância será:

$$L' = \frac{d^2\Phi}{dA \cos \theta' \, d\Omega'} \quad (1.72)$$

A radiância ao longo do tubo de raios no segundo meio está relacionada com a do primeiro meio por:

$$L' = L \frac{\cos \theta \, d\Omega}{\cos \theta' \, d\Omega'} = L \frac{\cos \theta \, \sin \theta \, d\theta \, d\phi}{\cos \theta' \, \sin \theta' \, d\theta' \, d\phi'} \quad (1.73)$$

onde a eq. (1.67) foi empregada. Como os raios incidente e refratado são co-planares, temos:  $d\phi = d\phi'$ . Tomando a diferencial da lei de Snell,  $n \sin \theta = n' \sin \theta'$ , temos:  $n \cos \theta \, d\theta = n' \cos \theta' \, d\theta'$ , que substituído na eq. (1.73) resulta em:

$$L' = L \left( \frac{n'}{n} \right)^2 \Rightarrow \frac{L'}{n'^2} = \frac{L}{n^2} \quad (1.74)$$

de forma que a radiância, dividida pelo quadrado do índice de refração, se conserva ao longo de um tubo de raios. Este resultado é chamado de *Teorema da Conservação da Radiância*. Ele implica que é impossível aumentar o brilho de uma fonte incoerente usando um sistema óptico passivo tal como uma lente. Ao formar uma imagem, uma lente pode apenas aumentar o ângulo sólido aparente de uma fonte, não a sua radiância.

Consideremos agora a irradiância sobre um pequeno objeto plano produzida por uma fonte circular plana tendo uma radiância uniforme  $L$  e subtendendo um ângulo  $\theta_0$ , como mostra a Fig. 1.18.

Da definição de radiância,  $\frac{d^2\Phi}{dA} = L \cos \theta \, d\Omega$ , dada pela eq. (1.71), temos que a irradiância é dada por:

$$E = \frac{d\Phi}{dA} = 2\pi L \int_0^{\theta_0} \sin \theta \cos \theta d\theta = \pi L \sin^2 \theta_0 \quad (1.75)$$

A quantidade  $\pi \sin^2 \theta_0$  é às vezes chamada de ângulo sólido projetado  $\Omega_p$  subtendido pela fonte. Assim,  $E = L \Omega_p$ . Este resultado é a equação básica para o cálculo da irradiância em uma superfície. Estabelece que a irradiância é igual à radiância da fonte multiplicada pelo ângulo sólido projetado subtendido pela fonte, visto da superfície. Assim, para calcular a irradiância, imaginamos que estamos sobre a superfície e olhamos para a fonte para determinar o ângulo sólido subtendido por ela.

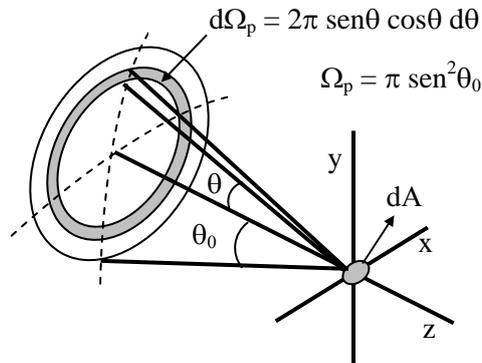


Fig. 1.18 – Irradiância sobre um pequeno objeto plano produzida por uma fonte circular plana.

As quantidades que são usadas para descrever a convergência de raios de luz são a abertura numérica, abreviada como NA, e o “*f*-number”, ou abertura relativa, abreviado como FNB. A abertura numérica é definida como:

$$NA = n \sin \theta_0 \quad (1.76)$$

onde  $n$  é o índice de refração. O “*f*-number” é definido por:

$$FNB = \frac{1}{2 NA} \quad (1.77)$$

Usando estas definições na eq. (1.75), encontramos:

$$E = \frac{\pi L (NA)^2}{n^2} = \frac{\pi L}{4n^2 (FNB)^2} \quad (1.78)$$

Para um sistema não uniforme ou fora de eixo, a integração da eq. (1.75) deve ser feita numericamente. Entretanto, há um caso fora do eixo simples de se considerar, que corresponde à situação em que a fonte é pequena, como indica a Fig. 1.19.

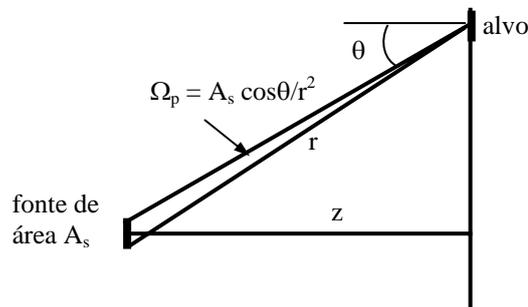


Fig. 1.19 – Sistema fora de eixo usado para mostrar a lei  $\cos^4$ .

Nesta situação, o ângulo sólido projetado  $\Omega_p$  da fonte varia com  $\cos^3\theta$ , porque a área projetada da fonte, vista do alvo, diminui como  $\cos\theta$ , e a distância  $r$  da fonte para a imagem é inversamente proporcional a  $\cos^2\theta$ . Além disso, a área projetada do alvo diminui com  $\cos\theta$ , de forma que a irradiância global sobre o alvo se torna:

$$E = E_0 \cos^4\theta \quad (1.79)$$

Esta é a lei chamada de  $\cos^4$ . Entretanto, muitos sistemas ópticos usados fora de eixo, não obedecem à lei do  $\cos^4$  por sofrerem de restrição angular (*vignetting*), que é um termo referente à redução da abertura total de um sistema causada pela separação axial de duas aberturas. Um exemplo simples de restrição angular é o de um tubo curto visto de um ângulo oblíquo, como mostrado na Fig. 1.20. A abertura do tipo olho é típica da restrição angular de uma lente. É claro que numa lente, a abertura de cada elemento é modificada pelas lentes existentes entre ela e o observador, freqüentemente com aumento diferente.

Embora a restrição angular possa ser indesejável do ponto de vista radiométrico, ele é freqüentemente útil para o projetista controlar raios aberrantes que passam perto das extremidades das lentes. Algumas lentes,

como o tripleto de Cooke, dependem de restrição angular para produzir desempenho satisfatório.

Uma estimativa geral da restrição angular pode ser obtida dos dados de um raio paraxial. Se um raio principal é traçado através de um sistema, partindo de um ponto fora do eixo, então se o sistema não tem nenhuma restrição angular, o raio de abertura de cada lente deve ser pelo menos tão grande quanto as somas dos valores absolutos das alturas dos raios axial e principal na lente. Os programas computacionais usam este fato para computar os raios de abertura iniciais das lentes, no caso em que nenhum valor é especificado.

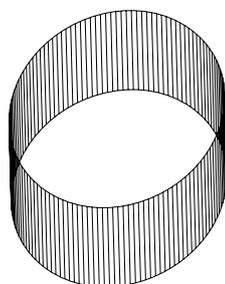


Fig. 1.20 – Tubo curto visto de um ângulo oblíquo.

## 1.16 Aberturas e pupilas

O tamanho finito de uma lente faz com que ela colete apenas uma fração da energia emitida por uma fonte pontual. A limitação física imposta pela borda da lente determina quais raios entram no sistema para formar uma imagem. Desta forma, o diâmetro desobstruído de uma lente funciona como uma abertura pela qual a energia flui. Qualquer elemento físico que limita a quantidade de luz atingindo o plano da imagem, seja ele a borda da lente ou uma íris como a mostrada na Fig. 1.21, é chamado de bloqueio com abertura (*aperture stop*) ou simplesmente abertura. Nos programas de desenho óptico a abertura é representada pelo anagrama *AS* (ou *AST*).

Um outro conceito bastante útil para se determinar quais raios conseguirão percorrer um sistema óptico completo, é o da pupila. A pupila de entrada de um sistema é a imagem da abertura vista de um ponto axial do objeto através dos elementos que procedem a abertura. Se não houver

nenhuma lente entre o objeto e a abertura, esta será a própria pupila de entrada.

Para ilustrar a idéia de pupila de entrada, vamos considerar uma abertura colocada depois da lente, como mostra a Fig. 1.21(a). Como a abertura está colocada depois da lente, sua imagem será virtual e aumentada. Ela pode ser encontrada da forma usual, analisando-se os raios provenientes da borda da abertura (raios tracejados).

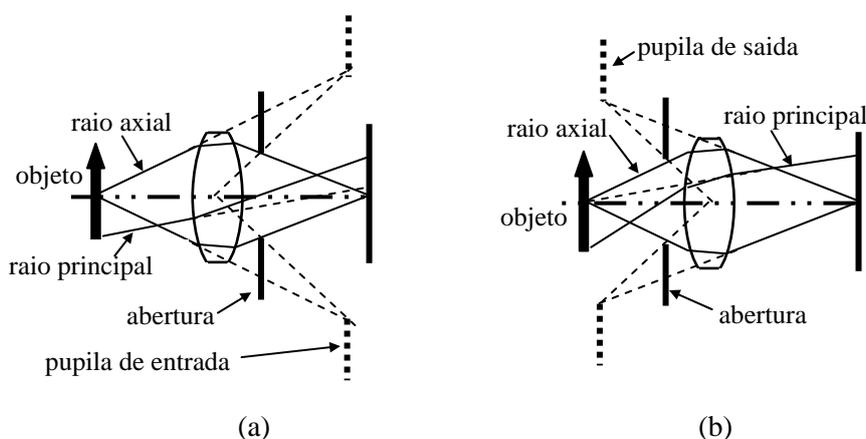


Fig. 1.21 – Definições de pupila de entrada (a) e pupila de saída (b).

A pupila de saída, por sua vez, é a imagem da abertura vista do ponto axial contido no plano da imagem através de lentes (posicionadas entre a abertura e o plano da imagem). Na Fig. 1.21(a) não existe nenhuma lente entre a abertura e o plano da imagem de forma que a abertura é a própria pupila de saída. Já na Fig. 1.21(b) vemos a situação em que a íris está colocada antes da lente e assim, a pupila de saída não coincide com a abertura. É conveniente notar que as posições das pupilas de entrada e saída dependem da posição do objeto.

Nos dois esquemas da Fig. 1.21 foi incluído um raio chamado de raio principal. Ele é definido como um raio qualquer vindo do objeto de um ponto fora do eixo e passando pelo centro da abertura. O raio principal entra no sistema óptico ao longo de uma linha passando pelo ponto central da pupila de entrada e deixa o sistema ao longo de uma linha passando pelo centro da pupila de saída. Se o objeto estiver apenas um pouco fora do eixo, o raio principal se comporta como o raio central do cone de raios

vindo de um ponto do objeto. Se o objeto estiver muito fora do eixo, a extremidade da lente limitará um lado do feixe e a abertura limitará o outro lado. Teremos então uma pupila com restrição angular, e neste caso, o raio principal geralmente não é o raio central de um feixe de raios fora de eixo. Os raios principais são de grande importância quando se deseja corrigir as aberrações no desenho de um sistema óptico.

Nos textos mais antigos de desenho óptico, o termo bloqueio de campo é usado para descrever uma superfície que limita o campo de visão de um sistema e as janelas de entrada e de saída são definidas como a imagem do bloqueio nos espaços objeto e imagem. Bloqueios de campo são comumente encontrados em sistemas de acomodamento visual que incluem retículos e em sistemas para o infravermelho, onde são usados anteparos internos para diminuir a luz espalhada. Porém, o conceito não é útil em muitos sistemas onde não há nenhuma superfície dentro do sistema que serve como bloqueio de campo. Então, o campo de visão é limitado pela extremidade do objeto, pela extremidade da imagem, ou alguma condição de restrição angular que acontece dentro da lente.

As pupilas de entrada e saída servem para definir a abertura efetiva de um sistema simples cujo comportamento é adequadamente caracterizado pela óptica paraxial. Note que sistemas contendo elementos inclinados ou descentralizados não podem ser tratados pela óptica paraxial. Até mesmo na aproximação paraxial, complicações ocorrem em sistemas nos quais uma única superfície não serve como abertura. Por exemplo, num sistema contendo lentes cilíndricas, a superfície que limita a raio  $yz$  pode ser diferente da que limita o raio  $xz$ . A pupila efetiva fora de eixo é freqüentemente determinada por uma abertura para a parte inferior do raio e uma diferente para a parte superior do raio.

Em sistemas reais, é freqüentemente necessário considerar as aberrações da pupila. Por exemplo, em sistemas de grande abertura angular, as aberrações muitas vezes distorcem e movem demasiadamente a pupila real e aqueles raios direcionados para a pupila paraxial podem nem mesmo passar pelo sistema. A pupila real pode parecer rodar na direção do observador e crescer em tamanho conforme o ângulo de campo aumenta.

A quantidade de luz que atravessa um sistema real depende das aberturas físicas realmente presentes e não da especificação arbitrária da abertura paraxial e do campo visual. Ao mesmo tempo, as aberturas preditas pelo traçado dos raios paraxiais podem prover uma indicação

aproximada das aberturas necessárias para muitos sistemas que não têm nenhuma restrição angular. O termo abertura é usado, num sentido geral, para descrever as características que limitam a extensão uma superfície óptica. Consideraremos na presente discussão que as aberturas são circulares e definidas pelas extremidades das superfícies ópticas.

O raio exigido para a abertura na qual passa um feixe que se propaga ao longo do eixo óptico é igual à altura do raio axial na lente. Se o feixe vier de um ponto fora do eixo, o raio da abertura deve ser a soma das alturas dos raios axial e principal. As aberturas paraxiais podem diferir em cada superfície de uma lente. Numa lente real, as extremidades são em geral, paralelas ao eixo óptico. Nos desenhos, o raio de uma lente é tomado como sendo igual à maior das duas aberturas. Uma linha perpendicular ao eixo é desenhada entre a abertura menor e a maior. Isto leva aos elementos como os que aparecem na Fig. 1.22. Nela, a segunda lente é impossível de se fabricar usando técnicas tradicionais de lapidação e polimento, mas pode ser feita por moldagem ou por outros métodos modernos, como o torneamento com ferramenta de diamante. A terceira lente tem uma região plana que é usada comumente para reduzir o peso de elementos negativos espessos.

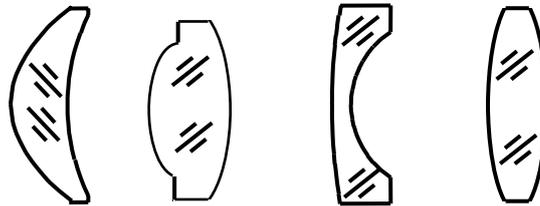


Fig. 1.22 – Aberturas em diferentes tipos de lentes.

A Fig. 1.23 mostra o modo que os programas de desenho óptico atribuem aberturas ao triplo de Cooke. Cada superfície paraxial é mostrada como uma linha reta, com comprimento igual a duas vezes o raio da abertura paraxial, e as superfícies reais são mostradas como linhas curvas. As trajetórias mostradas são para raios reais. Os locais das pupilas, mas não seus tamanhos, são mostrados através de pontos.

Olhando para a figura, podemos ver quais raios são responsáveis pelas aberturas, como também as diferenças entre as aberturas paraxiais e as aberturas reais necessárias para passar os feixes. O raio mais baixo define a abertura antes do bloqueio e o raio superior, a abertura depois do

bloqueio, uma condição comum, mas não necessária. O raio principal real perde o centro da pupila de entrada paraxial por pouco, indicando alguma aberração da pupila. O raio da borda superior perde as aberturas paraxiais das duas últimas superfícies por uma quantia significativa, mostrando que esta lente deve ser feita maior que o valor esperado para passar completamente o feixe real da extremidade do campo.

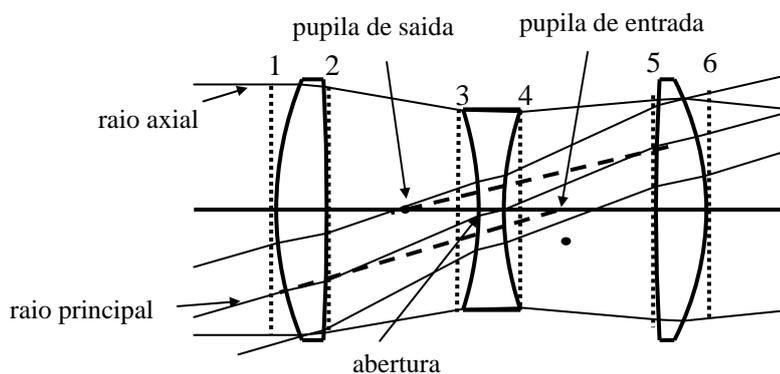


Fig. 1.23 – Aberturas do triplete de Cooke.

### 1.17 Alguns exemplos de sistemas ópticos

O projeto de sistemas ópticos é um assunto muito extenso para ser tratado em detalhes aqui. Porém, é importante entender alguns princípios fundamentais, particularmente aqueles relacionados às trajetórias dos raios axial e principal, e por isso vamos discutir alguns sistemas que são de uso comum.

#### a) *Lente fina*

Uma lente fina é aquela que possui espessura nula. Obviamente, este tipo de lente não existe de fato, mas os efeitos das espessuras de uma lente são em geral desprezíveis e sua eliminação simplifica bastante as equações ópticas. Lentes finas são freqüentemente desenhadas como setas duplas apontando para fora se a lente for positiva, ou apontando para dentro se a lente for negativa, como esquematizado na Fig. 1.24.

Para uma única lente fina, a abertura é a própria lente, de forma que o raio axial é aquele que vem do vértice do objeto e atravessa a extremidade da lente, enquanto que o raio principal vem da extremidade

do campo de visão e atravessa o centro da lente. Sistemas complexos de lentes finas podem conter várias lentes, de forma que a imagem da abertura produzida pelo conjunto de lentes deve ser achada para se determinar os locais das pupilas, antes de se determinar as trajetórias dos raios axial e principal.

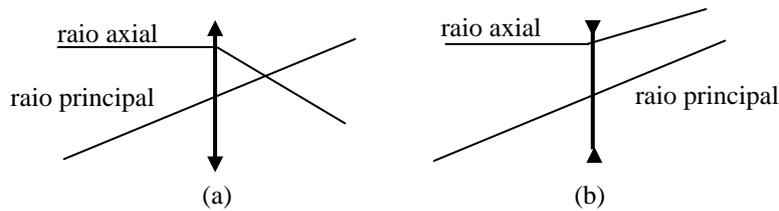


Fig. 1.24 – Lentes finas (a) positiva e (b) negativa.

#### b) Objetiva fotográfica

A objetiva fotográfica é um sistema que inclui um número enorme de exemplos, indo desde lentes relativamente simples como o tripeto de Cooke, até sistemas de foto-litografia muito complexos, contendo dezenas de elementos. Uma característica importante de uma objetiva fotográfica é que ela realiza um mapeamento do tipo  $tg\theta$ . Isto significa que a altura de imagem é proporcional à tangente do ângulo do raio principal, de forma que a imagem terá a mesma forma que o objeto. A diferença entre o mapeamento real e o produzido pela  $tg\theta$  é chamada de distorção.

Um exemplo de uma lente fotográfica típica é a objetiva dupla de Gauss, mostrada na Fig. 1.25, que é o tipo mais comum de lente de alta velocidade usada em máquinas fotográficas com comprimento focal de 35 mm, operando tipicamente a uma velocidade de cerca de  $f/2$ .

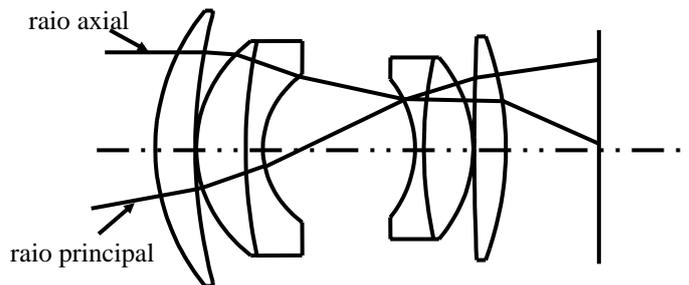


Fig. 1.25 – Objetiva dupla de Gauss.

Como outras lentes, ela funciona compensando as aberrações introduzidas pelas superfícies positivas e negativas. A objetiva dupla de Gauss é aproximadamente simétrica, com a abertura colocada entre os dois elementos negativos centrais. As trajetórias dos raios axial e principal são importantes para a compensação das aberrações. Numa primeira aproximação, o raio axial passa pela extremidade do sistema completo e o raio principal pelo seu centro.

A razão entre as alturas do raio principal e do raio axial numa dada superfície é um indicador da eficácia desta superfície em controlar as aberrações fora de eixo. Se o poder positivo de uma lente estiver mais concentrado na parte dianteira do que a parte traseira da lente, os pontos principais estarão deslocados para frente e a lente se torna uma lente de telefoto, para a qual o comprimento focal efetivo é maior que a distância do centro da lente ao seu foco, como mostrado na Fig. 1.26.

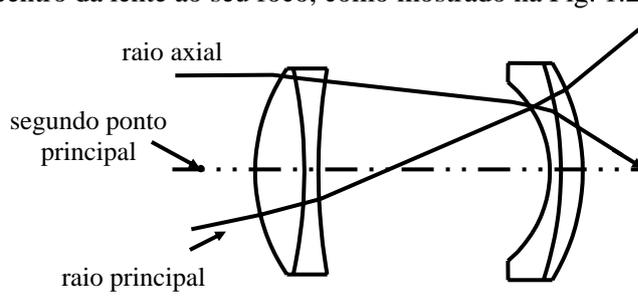


Fig. 1.26 – *Objetiva de telefoto.*

Por outro lado, se o poder positivo estiver concentrado na parte traseira da lente, o comprimento focal será menor que a distância do centro ao foco da lente e esta será chamada de lente retrofocal. Um exemplo deste tipo de objetiva está mostrado na Fig. 1.27.

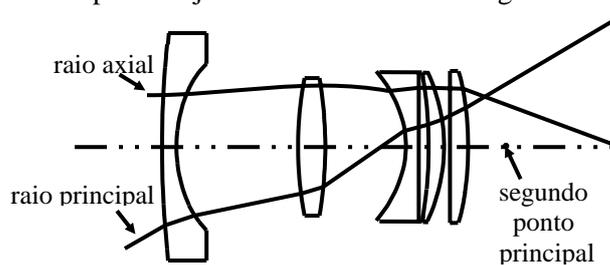


Fig. 1.27 – *Objetiva retrofocal.*

Muitas objetivas fotográficas são lentes com *zoom*, onde o comprimento focal é variado pelo movimento de um ou mais grupos de elementos dentro da lente, como mostrado na Fig. 1.28. Em (a), o grupo *zoom* central de quatro elementos é movido para a parte de trás da lente, concentrando o poder na parte traseira e fazendo a lente se comportar como um desenho retrofocal. Em (b), o grupo *zoom* é movido para frente, mudando o poder da lente para frente, fazendo com que ela se comporte como uma objetiva telefoto. Note que tanto a posição interna do grupo *zoom* e o comprimento focal traseiro são mudados conforme a lente é ajustada. Como desenhado, a altura de imagem é variável, mas em uso seria mais comum a fixar a altura da imagem e variar o campo de visão.

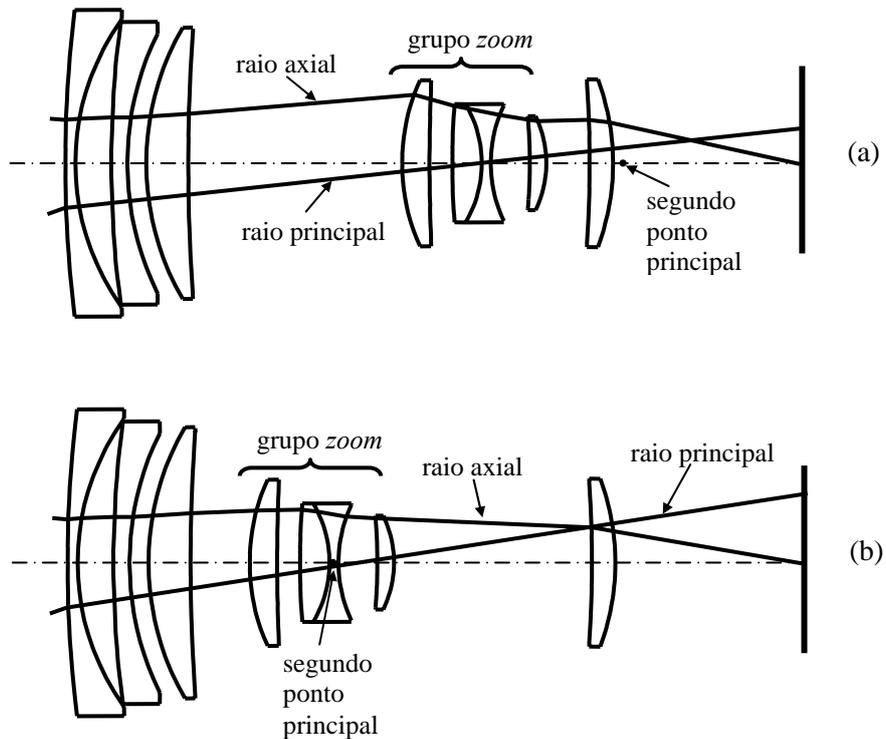


Fig. 1.28 – *Objetivas com zoom.*

### c) Olho humano

O olho humano é uma parte importante de qualquer sistema visual global. Nele, a refração de luz acontece principalmente na superfície exterior, chamada de córnea. A imagem é formada no fundo do olho, num conjunto de detectores de luz do tipo cones e bastonetes que compõem a retina. A porção da retina que tem a acuidade mais alta está localizada na região central é chamada de fóvea, enquanto que a região mais afastada do centro é responsável pela visão periférica. O olho pode girar de forma a trazer a imagem do ponto de interesse visual para a região foveal e devido a isto, os raios axial e principal não são precisamente definidos. Como mostra a Fig. 1.29, raio axial é o raio que parte do vértice do objeto e passa pela borda da pupila de entrada do olho, que é a imagem da íris formada pela córnea.

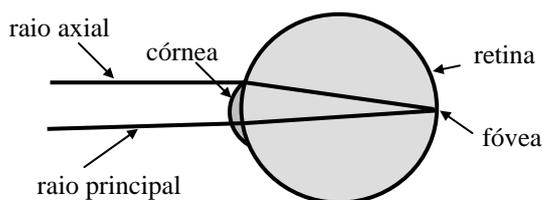


Fig. 1.29 – O olho humano.

O raio principal é às vezes tomado como um raio do campo de visão que passa pelo centro de rotação do olho, pois o olho girará automaticamente para ver uma imagem fora de eixo. Ao se desenhar qualquer instrumento visual deve-se tomar cuidado para assegurar que a pupila é suficientemente grande para acomodar o movimento da íris que ocorre quando o olho gira.

### d) Lupa

Uma lupa simples é uma lente que é usada para estender o intervalo de acomodação do olho e permitir a visão de objetos pequenos. A distância mais próxima que o olho humano consegue formar uma imagem varia desde aproximadamente 10 cm para crianças até vários metros para pessoas com idade superior a 60 anos; um valor de 25 cm é usado como referência para computar o poder de uma lupa. Assim, uma lupa com

comprimento focal de 25 mm produz um aumento de 10x. A Fig. 1.30 mostra o uso típico de uma lupa. Como mostrado, o raio axial emerge paralelo ao eixo, indicando que o ponto focal está no infinito. Tal sistema é às vezes denominado de afocal no lado da imagem. Em uso real, o usuário ajusta a distância para ter o máximo conforto visual, mantendo o objeto normalmente em foco.

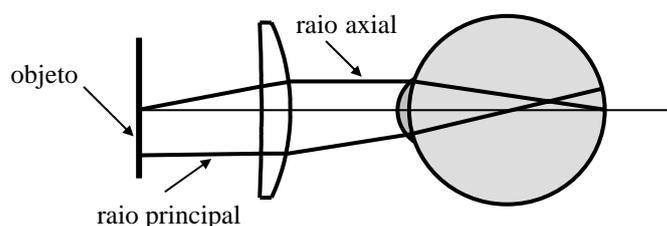


Fig. 1.30 – O olho humano com lupa.

#### e) Telescópio

O telescópio inversor, ou Kleperiano, faz parte de uma família de sistemas ópticos conhecidos como lupas compostas. Tais sistemas incluem uma objetiva que forma uma imagem aérea e uma ocular que serve como uma lupa para ver a imagem, como esquematizado na Fig. 1.31. A objetiva serve como a abertura de entrada. A pupila de entrada fica assim situada no plano da objetiva e a pupila de saída fica situada no plano onde a objetiva tem sua imagem formada pela ocular. O olho do observador deve ser colocado na pupila de saída do instrumento, de forma que o campo inteiro pode ser visto sem restrição angular. A distância entre a superfície traseira da ocular e o plano da pupila de saída é chamada de alívio de olho (*eye relief*).

O raio axial entra na objetiva, paralelo ao eixo, e emerge da ocular paralelo ao eixo, de forma que a imagem pode ser vista com o olho relaxado. O raio principal atravessa o centro da objetiva e a borda da ocular. Da figura se vê que o campo de visão do telescópio está limitado pelo diâmetro da ocular. A trajetória do raio principal mostra que o que o telescópio forma uma imagem invertida. Da lei de Lagrange, segue que a ampliação angular do telescópio é proporcional à razão dos diâmetros das pupilas de entrada e de saída.

Uma forma alternativa de telescópio é o Galileano, mostrado na Fig. 1.32. O telescópio Galileano difere do telescópio inversor por formar uma imagem direta. Os caminhos dos raios axial e principal são mostrados na figura. O raio axial entra no sistema paralelo ao eixo e deixa o sistema também paralelo ao eixo, de forma que o sistema é afocal.

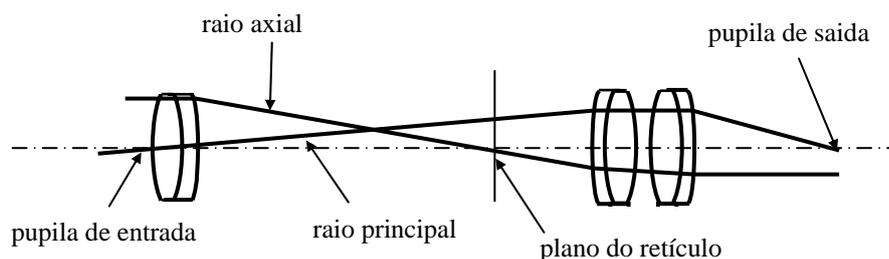


Fig. 1.31 – Telescópio inversor.

A objetiva serve como abertura, mas como a ocular tem um comprimento focal negativo, o raio principal diverge depois de atravessar a ocular, colocando a pupila de saída dentro do telescópio. Como não é possível por o olho do observador na pupila de saída do instrumento, o campo de visão será limitado pelo diâmetro da pupila.

Telescópios Galileanos são ocasionalmente usados como instrumentos visuais de baixo poder, mas o alívio de olho negativo é uma falha grave que restringe sua utilidade em sistemas de altos poderes. O sistema Galileano tem comprimento global consideravelmente mais curto que o sistema inversor e é freqüentemente usado como expensor de feixes de laser, onde o campo de visão limitado não é importante.

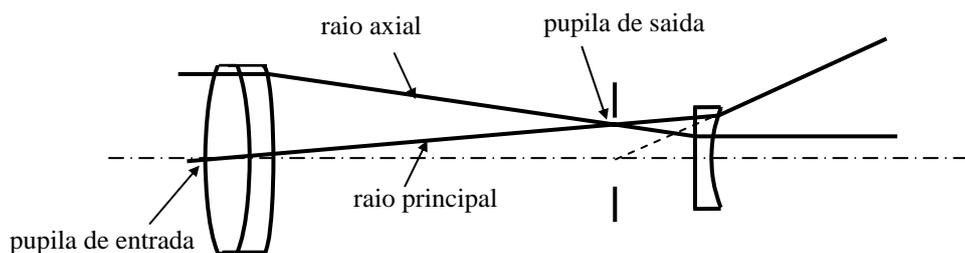


Fig. 1.32 – Telescópio Galileano.

*f) Sistema de guiamento*

Os telescópios são freqüentemente acoplados a sistemas de guiamento para transmitir imagens a um local diferente. O esquema paraxial de um sistema de guiamento típico está mostrado na Fig. 1.33. As trajetórias dos raios axial e principal são as mesmas tanto no espaço da imagem como no espaço de objeto, mas estão deslocadas à direita pelo comprimento do guia. Sistemas de guiamento consistem em sucessões alternadas de objetivas e lentes de campo que dobram o raio principal mas não o raio axial. Num sistema de guiamento real, a curvatura de campo é um problema freqüente.

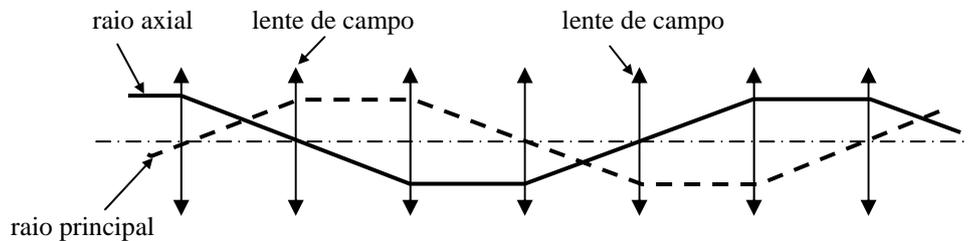


Fig. 1.33 – Sistema de guiamento.

A Fig. 1.34 mostra um telescópio com *zoom* que contém um sistema de guiamento e reversor, que transforma a imagem invertida em imagem direta. Neste sistema, uma lente de campo defronte o sistema reversor restringe a altura de raio principal e os dois dubletos pequenos retransmitem a imagem primária perto da lente de campo para o plano do retículo. A posição e espaçamento das lentes reversoras podem ser variados para mudar o aumento do guiamento.

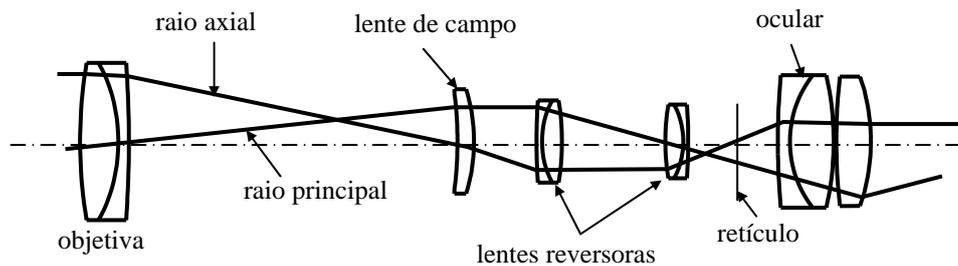
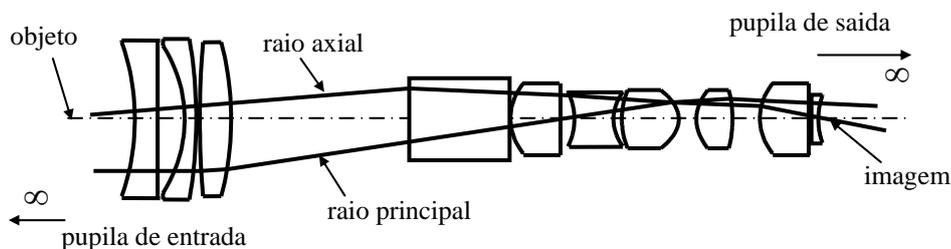


Fig. 1.34 – Sistema de guiamento e reversão.

g) *Lente telecêntrica*

Um número crescente de lentes é telecêntrica no objeto, imagem, ou em ambos os lados. Telecêntrica significa que o raio principal é paralelo ao eixo, ou equivalentemente, que a pupila está no infinito. Tais lentes são úteis em várias aplicações de metrologia, porque elas têm a propriedade que a altura da imagem não muda conforme a lente é focalizada. A lente da Fig. 1.35 de é um exemplo típico que é telecêntrica em ambos os lados. Outros exemplos de lentes telecêntricas incluem lentes de varredura, que devem ser telecêntricas para preservar as relações geométricas e lentes de transformada Fourier, na qual o raio axial numa direção é igual ao raio principal na outra direção.

Fig. 1.35 – *Lente telecêntrica.***Bibliografia**

- 1.1. A. Gerrard and J. M. Burch, *Introduction to Matrix Methods in Optics*, John Wiley and Sons, NY (1975).
- 1.2. J. W. Simon and M. J. Guttman, *States Waves and Photons*.
- 1.3. M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 3<sup>rd</sup> ed., Pergamon, Oxford (1970)
- 1.4. G. R. Fowles, *Introduction to Modern Optics*, Holt, Rinehart and Winston, NY (1968)
- 1.5. E. Hecht and A. Zajac, *Optics*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, MA (1979)
- 1.6. A. E. Conrady, *Applied Optics and Optical Design*, Dover Publications, NY (1929)
- 1.7. R. Kingslake, *Lens Design Fundamentals*, Academic Press, NY (1978).

- 1.8. F. W. Sears, *Física: Óptica*, G. Carneiro, RJ (1953).  
 1.9. S. C. Zílio, *Óptica Moderna - Fundamentos e Aplicações*, IFSC/USP (2006)

### Problemas

- 1.1. Explique o que são: a) planos principais, b) pontos nodais, c) distância focal efetiva, d) distâncias focais frontal e traseira, e) poder da superfície. Faça desenhos sempre que necessário.
- 1.2. Use o método y-nu para achar a distância focal traseira do dubleto cimentado mostrado na Fig. 1.36. Considere  $n_1 = 1.52$ ,  $n_2 = 1.65$ ,  $r_1 = 7$  cm,  $r_2 = -5$  cm,  $r_3 = -16$  cm,  $t_1 = 1$  cm e  $t_2 = 0.4$  cm.



Fig. 1.36 – Dubleto cimentado.

- 1.3. Refaça o problema 1.2 pelo método matricial.
- 1.4. Suponha que um raio incida sobre o dubleto da Fig. 1.36 paralelo ao eixo óptico a uma altura de 5 mm. Encontre o ângulo que o raio faz com cada normal às superfícies durante sua propagação.
- 1.5. Usando a metodologia da seção 1.12, encontre as posições dos planos principais do dubleto da Fig. 1.36.
- 1.6. Suponha que a lente espessa da Fig. 1.13 se encontre no ar e possua  $n = 1.52$ ,  $r_1 = 7$  cm,  $r_2 = -5$  cm e  $t_1 = 0.5$  cm. Encontre os valores numéricos da distâncias focal efetiva e da posição dos planos principais. Se a lente fosse delgada ( $t \cong 0$ ), qual seria sua distância focal?
- 1.7. Um objeto com altura  $h = 3$  mm é colocado a uma distância de 5 cm da primeira superfície da lente do problema 1.6. Onde se formará a imagem e qual a sua altura?
- 1.8. Use o método y-nu para encontrar a distância focal traseira da combinação de lentes finas tratada na seção 1.9.

- 1.9. Mostre que a formação de imagem por uma interface esférica de raio  $r$  separando dois meios dielétricos de índices de refração  $n'$  e  $n$  satisfaz a equação:  $\frac{n}{s} + \frac{n'}{s'} = \frac{n'-n}{r}$ , enquanto que a magnificação transversal é dada por  $m_T = -\frac{ns'}{n's}$  e a magnificação longitudinal por  $m_L = -\frac{n'}{n}m_T^2$ .
- 1.10. Derive a expressão  $r = 2f$  para um espelho esférico.
- 1.11. Deduza a matriz dada na eq. (1.39).
- 1.12. Considere a associação de duas lentes finas de distâncias focais  $f_1$  e  $f_2 = f_1/2$ , separadas por  $d = f_1/2$ . Encontre a distância focal do conjunto e as posições dos planos principais primário e secundário.
- 1.13. Justifique a matriz de transferência usada na eq. (1.57).
- 1.14. Deduza a equação do esferômetro, que relaciona o raio de curvatura com a corda e a flecha de uma superfície esférica.
- 1.15. Um objeto de 3 mm de altura é colocado diante de duas lentes finas de distâncias focais 10 cm e 20 cm respectivamente. A separação entre as lentes é de 5 cm e o objeto dista 50 cm da primeira lente (a de 10 cm). Encontre a altura da imagem formada.
- 1.16. Use o método y-nu para achar a distância focal traseira de um duplete simétrico espaçado onde  $n_1 = n_2 = 1.5$ ,  $r_1 = 5$  cm,  $r_2 = r_3 = \infty$ ,  $r_4 = -5$  cm,  $t_1 = t_3 = 1.5$  cm e  $t_2 = 3$  cm.
- 1.17. Usando o método matricial encontre a distância focal efetiva e as posições dos planos principais da lente do problema anterior. Sugestão: Utilize a mesma metodologia da seção 1.12 (lentes espessas).
- 1.18. Um objeto de 5 mm de altura é colocado a uma distância de 5 cm da primeira lente do problema 1.17. Supondo que os diâmetros das lentes sejam de 3 cm, encontre a posição da imagem formada, a altura da imagem formada, o invariante de Lagrange e ângulo do raio axial no plano da imagem.

- 1.19. *Método  $\ell - \ell'$* : De acordo com o problema 1.9, a refração pelo dioptro mostrado na Fig. 1.37 é dada por:  $\frac{n}{\ell} + \frac{n'}{\ell'} = \frac{n'-n}{r}$ , de onde se tira:  $\ell' = \frac{n'}{\phi - \frac{n}{\ell}}$ , onde  $\phi = \frac{n'-n}{r}$ . Se houver outro dioptro à direita podemos aplicar novamente esta igualdade desde que se use a translação  $\ell_j = t - \ell'_{j-1}$ . Usando este método, refaça o problema 1.2.

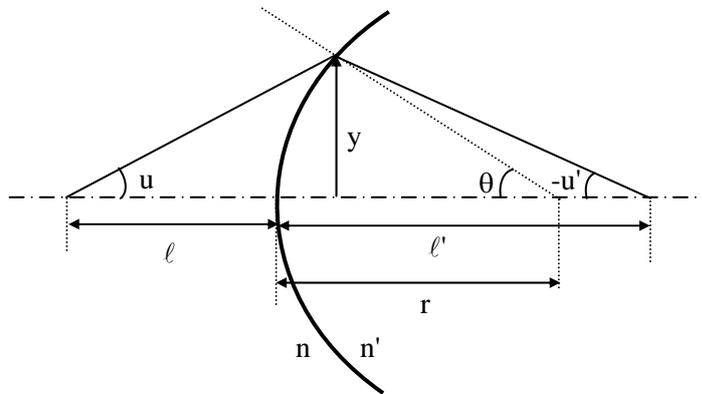


Fig. 1.37 – Dioptro esférico de raio  $r$ .

- 1.20. Um sistema óptico (lente) complexo, que se encontra no ar, é caracterizado por uma matriz conhecida  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , que relaciona o raio que entra na primeira superfície com o raio que sai na última. Encontre as distâncias focais frontal ( $f_F$ ) e traseira ( $f_B$ ), a posição dos pontos principais ( $P$  e  $P'$ ) e a distância focal efetiva ( $f$ ) como função dos elementos da matriz.